

严格顶点约束的网格光顺算法

陈仁杰, 刘利刚⁺, 董光昌

(浙江大学 数学系计算机图像图形研究所, 浙江 杭州 310027)

(⁺ligangliu@zju.edu.cn)

摘要: 在逆向工程中, 随着三维扫描仪越来越多的用于三维建模, 需要更快更可靠的网格光顺算法用来去除扫描数据中不可避免的噪声. 如何在光顺过程中保持原始扫描数据的精度成为逆向工程中的一个重要问题. 为此, 提出了一种严格顶点约束的网格光顺算法, 在给定非线性约束条件下, 优化网格的光顺能量, 保证了光顺后的网格上的任意顶点离原始扫描顶点的距离都不超过给定的阈值, 并且给出了一个有效的迭代线性求解方法. 实验证明, 算法高效、稳定, 在给定误差范围内实现了最大程度的光顺, 并且能较好地保持网格的精细特征.

关键词: 网格; 光顺; 全局; 误差约束; 近插值

Mesh Fairing With Vertex Constraint

Chen Renjie, Liu Ligang⁺, Dong Guangchang

(Institute of Computer Graphics and Image Processing, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract: As 3D scanner are getting more and more widely used for creating 3D models, more efficient and reliable mesh fairing method is needed to reduce the noise produced along with the models. Especially, we need to make sure the fairing process doesn't destroy the data precision of the scanned models. We present a mesh fairing algorithm with vertex constraint. We optimize the fairing energy of the noisy mesh under the nonlinear constraint. The distance between each vertex on the denoised mesh and its position on the original mesh is guaranteed to be less than the given threshold. Experiments show that our approach is efficient and stable, and most noise is removed while much sharp feature still remains.

Key words: mesh; fairing; error constrain; near-interpolation.

1. 引言

在计算机图形学中, 三维模型的获取是包括逆向工程在内的很多研究如建模、重建等得以进行的重要前提. 三维扫描技术的发展使模型数据采样不再困难, 用户可以方便地利用三维扫描仪、CT、MRI 等设备快速而精确地对模型进行测量. 但是实物测量技术会不可避免地带来噪声和误差, 使得获取的多边形网格模型中往往存在凹凸不平的细小噪声, 因此在后续处理之前, 必须对它们进行光顺、去噪处理.

光顺就是消除网格模型局部扰动和噪声的过程, 其目标是在剔除噪声获取离散曲面高阶光滑性的同时, 能保持模型的拓扑信息和几何特征不变, 避免发生模型收缩和过度光顺等现象. 现有三角网格光顺方法主要可以分为两类: 局部迭代算法和全局优化算法. 局部迭代算法是利用原始网格顶点邻域信息, 依次更新网格所有

顶点的位置, 使其向网格更光滑的方向移动. 最早提出也是最经典的此类算法是 Laplace 光顺算法^[1], 它能迅速有效地消除噪声, 但同时也会使得网格发生较大的收缩和变形. Taubin^[2]将信号处理的知识引入到网格去噪, 通过对 Laplace 算子的线性逼近, 提出各向同性快速网格光顺算法, 大大减小了网格去噪后发生收缩变形的幅度. Desbrun^[3]等人提出了离散网格点平均曲率的求法, 让顶点沿法向以平均曲率值的速度移动, 取得了较好的效果. Kobbelt^[4]等提出了一种基于线性滤波的多分辨率方法, 用于去噪和造型, 后刘^[5]等人又提出了局部保重心算法以阻止网格出现收缩. 这些方法都可以有效地去除噪声, 但都是各向同性的方法, 对网格噪声和突起特征没有区别对待, 造成网格的尖锐特征没能很好的保持. 后来又有很多学者提出了不同的保特征光顺算法, 大致可以分为基于扩散的^[6-8]和基于双边滤波的^[9]两种, 前者的主要思想是修改扩散方程, 使得它非线性或各向异性, 由曲率张量决定局部的扩散, 从而保持或

者提高尖锐特征,后者则是通过顶点多阶邻域将噪声和尖锐特征区别对待,较好地保留了网格的尖锐特征.另外, Peng^[10]等人将局部自适应的 Wiener 滤波器成功地运用到网格去噪上,提供了一种快速的保特征算法,但它对网格的连接关系有一定要求,不具普遍性.与局部迭代算法不同,全局优化算法则是先提出一个关于整个网格的光顺能量,然后对此能量进行全局优化,一次求解出所有顶点光顺后的位置.比如 Liu 等^[11]将网格的 Laplace 能量和光顺误差之和作为目标能量进行全局优化.

随着三维测量技术的不断发展,模型的测量精度也越来越高,但在很多实际应用如工业制造、医学中,对数据精确度要求非常高,然而现有的网格光顺算法大都存在顶点偏移过多问题,即在光顺同时对顶点误差不可控制,不能保证在所有顶点偏移原来顶点距离小于一定阈值.为此,本文提出了一种新的全局光顺算法,此算法可以保证网格模型在光顺的同时仍能在测量精度范围内.

2. 严格顶点约束的网格光顺

由于实物扫描得到的网格噪声一般总是在三维扫描仪的精度范围内,即绝大部分扫描顶点和对应的真实模型顶点之间距离总是在此精度范围内,所以在给定某些顶点的精度范围下,如何对网格进行最大程度的光顺在实际应用中有着重要意义.

严格顶点约束的网格光顺就是在给定所有(或部分)顶点的误差范围内,对网格进行最大程度的光顺.设网格 V 的光顺能量为 $F(V)$, 给定所有顶点最大误差为 ε , 则严格顶点约束的网格光顺就是求解以下问题:

$$\begin{aligned} \min F(V), \\ \text{s.t. } \|v_i - v_{i0}\| < \varepsilon, \quad i=1,2,\dots,n \end{aligned} \quad (1)$$

其中 v_{i0} 和 v_i 分别为网格 V 的第 i 个顶点在光顺前后的坐标.

问题(1)是一个带非线性约束的最优化问题,直接求解很困难.现有光顺算法,无论是局部迭代算法,还是全局优化算法,均无法用于求解此问题.例如在局部迭代算法中,随着迭代次数增加,网格光顺能量越来越小,然而部分顶点离原始测量值越来越远,以致超过指定的误差范围.而在 Liu 等^[11]提出的全局优化算法中,非线性约束被转化为二次能量,并与光顺能量合并优化.但是组合能量的优化完全不能保证满足前述非线性约束.即使用户通过调节系数以降低光顺程度为代价减小网格的整体误差,但由于采用的误差度量为所有顶点的误差和,故仍可能导致部分顶点的误差超过给定范围.

Klaus 等^[12]最近也提出了类似问题.然而为了便于求解,他们将球约束 $\|v_i - v_{i0}\| < \varepsilon$ 简化为盒子约束:

$$|x_i - x_{i0}| < \varepsilon, |y_i - y_{i0}| < \varepsilon, |z_i - z_{i0}| < \varepsilon, \quad i=1,2,\dots,n$$

但是为了保证和球约束同样的误差约束,盒子约束的可行解集要小得多,因此最后得到的不是满足原始约束下最光顺的网格.

3. 迭代线性求解算法

严格顶点约束的网格光顺是一个带非线性约束的最优化问题(1).这些非线性约束保证了光顺之后,任一顶点与其初始坐标偏离均不超过给定阈值.为了求解问题(1),我们采用了 Scott^[13]于 03 年提出的近插值算法.给定空间中点集 $V_0 = \{v_{i0} | i=1,2,\dots,n\}$ 和相应误差范围 $\{e_i | i=1,2,\dots,n\}$, 设 $E(V)$ 是关于点集 V 的能量函数,

则当 V 满足 $\min E(V)$, s.t. $|V_i - V_{i0}| \leq \varepsilon_i, \quad i=1,2,\dots,n$ 时,

称 V 是对 V_0 的最佳近插值.可以看出,问题(1)事实上等价于一个近插值问题.文献^[13]还证明了存在一组系数 $u_i, \quad i=1,2,\dots,n$ 使得问题(1)等价于:

$$\min_V \{E(V) + \sum_i u_i |v_i - v_{i0}|^2\} \quad (2)$$

并且系数 $u_i, \quad i=1,2,\dots,n$ 可以通过以下迭代算法确定:

Step 1. 初始化: 取 $u_i = 1, \quad i=1,2,\dots,n$

Step 2. 固定系数 u_i , 求解问题(2), 得到 v_i

Step 3. 更新所有系数 $u_i \leftarrow \frac{|v_i - v_{i0}|}{\varepsilon_i} u_i, \quad i=1,2,\dots,n$

Step 4. 如果 $\|v_i - v_{i0}\| < \varepsilon_i, \quad \forall i$, 结束迭代过程

否则返回 **Step 2**

问题(2)的求解比问题(1)简单的多,并且有许多现成数值优化算法可用于求解此类问题.特别的,当 $E(v)$ 为二次多项式时,我们可以对(2)求导,从而将其转化为一个线性方程组求解.因此这里我们采用以下 Laplace 能量作为目标函数进行优化:

$$E(V) = L(V) = \sum_i L(v_i)$$

其中 $L(v_i)$ 为顶点 v_i 的 Laplace 能量:

$$L(v_i) = \left| v_i - \sum_{j \in i^*} w_{ij} v_j \right|^2, \quad \sum_{j \in i^*} w_{ij} = 1$$

式中 i^* 为与 v_i 相邻的顶点索引集合, w_{ij} 为边 (i, j) 关于

顶点 v_i 的权重, 可以取边长权重或 \cot 权重^[3].

在 **Step 2** 中, 由于采用 Laplace 能量作为光顺能量, 故

$$\begin{aligned} E(V) + \sum_i u_i |v_i - v_{i0}|^2 &= L(V) + \sum_i u_i |v_i - v_{i0}|^2 \\ &= \sum_i \left| v_i - \sum_{j \in i^*} w_{ij} v_j \right|^2 + \sum_i u_i |v_i - v_{i0}|^2 \end{aligned} \quad (3)$$

固定系数 u_i 时, 对方程(3)分别关于 v_i 求导可得:

$$\sum_{k \in i^*} \left(v_k - \sum_{j \in k^*} w_{kj} v_j \right) + \left(v_i - \sum_{j \in i^*} w_{ij} v_j \right) + u_i (v_i - v_{i0}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

这是一个关于顶点 $v_i, i = 1, 2, \dots, n$ 的线性方程组, 并且

x, y, z 三个方向互不相关, 可以用现成的数值计算库求解. 可以看出, 第一次迭代过程中 **Step 2** 事实上和全局网格优化方法完全一样, 因此本文算法也可以看作是对全局网格优化^[11]结果的进一步误差优化.

4. 实验结果与比较

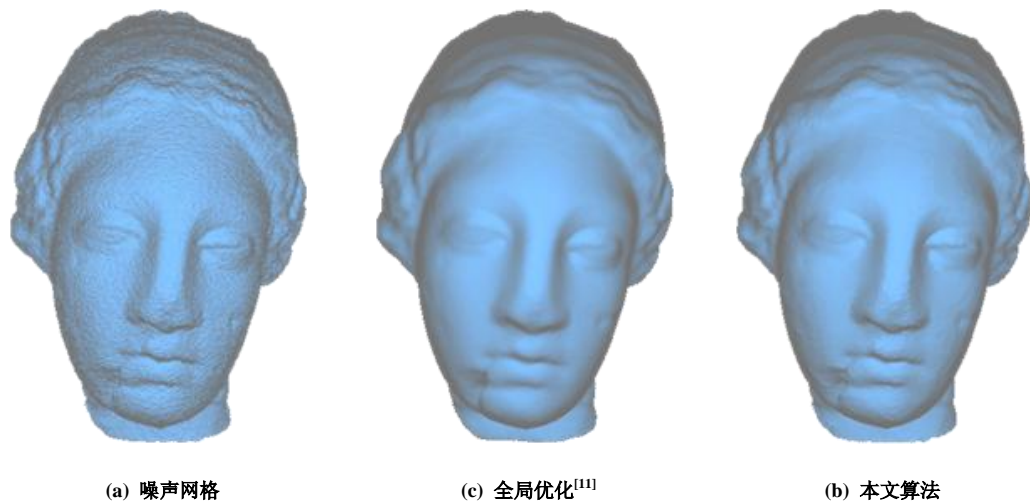
我们将本文算法在许多真实扫描模型上进行了测试, 并与全局网格优化算法^[11]进行了比较, 如图 1, 2 所示, 其中(a)是原始噪声网格, (b)是用全局优化算法^[11]得到的光顺结果, (c)是用本文算法得到的光顺结果, 图 2 还对手的一小部分进行了放大, 可以看出本文算法能有效去除噪声, 保持模型原始形状, 并且顶点误差约束保证了网格精细特征不被破坏. 我们还对人工生成的网格进行了测试, 如图 3 所示, 可以看出本文算法能更好地恢复被噪声破坏的网格. 在这些例子中, 我们均约束网格上所有顶点光顺误差不超过网格平均边长的 10%. 表 1 给出了相应的运行时间和光顺误差, 可以看出, 本文算法在光顺的同时确实有效保证了预先给定的误差范围. 另外由于近插值算法是一个迭代过程, 并且一般迭代次数在 20 次以内, 故本算法比全局优化算法要慢. 由于最大光顺误差随着迭代次数增加而减小, 最终收敛到给定误差值, 所以可以稍微增大目标误差值从而减少迭代次数实现加速.

5. 结论

本文实现了严格顶点约束的网格光顺算法, 在光顺网格的同时保持了物体的整体形状, 是一种保持特征的全局光顺算法. 大量实验证明了本文算法有效保持了网格的精细特征. 本文中讨论的是三角形网格, 但是可以直接推广到多边形网格, 算法形式基本不变. 以后的工作主要是算法进一步加速, 例如通过减少迭代次数来加快近插值算法的收敛. 另外本文是基于 Laplace 能量的最小化来实现光顺, 今后还可以寻找其它更合适的全局光顺能量用于优化.

表 1. 光顺误差和运行时间比较

模型	顶点数	全局网格优化		严格顶点约束全局光顺	
		最大顶点误差	光顺时间(秒)	最大顶点误差	光顺时间(秒)
Venus head	134359	0.013	10.69	0.002	97.35
Tero_tri	27960	0.025	1.58	0.006	17.52
Hand	9638	0.017	0.42	0.004	4.31

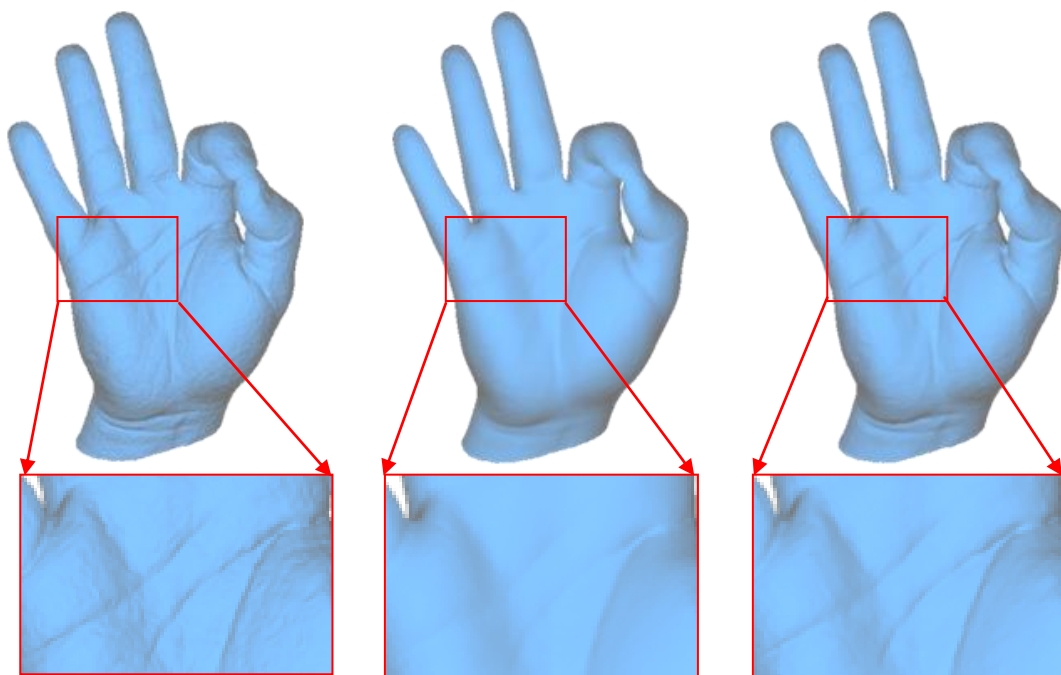


(a) 噪声网格

(c) 全局优化^[11]

(b) 本文算法

图 1. Venus 模型的光顺结果与比较

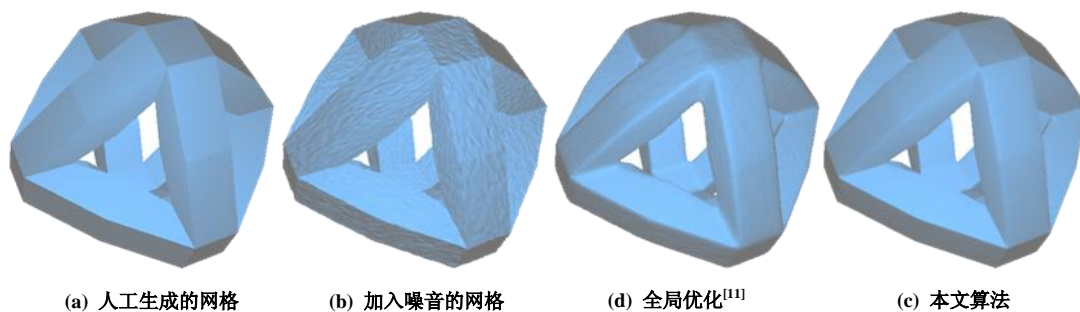


(a) 噪声网格

(c) 全局优化^[11]

(b) 本文算法

图 2. 手的光顺结果与比较



(a) 人工生成的网格

(b) 加入噪音的网格

(d) 全局优化^[11]

(c) 本文算法

图 3. 人工合成模型的光顺结果与比较

参考文献(References):

- [1] D A Field. Laplacian smoothing and Delaunay triangulations. *Communications in Applied Numerical Methods*, 1987, 4: 709-712
- [2] G Taubin. A signal processing approach to fair surface design. *Proceedings of the 22nd annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 1995
- [3] M Desbrun, M Meyer, P Schruder, A H Barr. Implicit fairing of irregular meshes using diffusion and curvature flow. *Proceedings of the 26th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 1999
- [4] L Kobbelt, S Campagna, J Vorsatz, H-P Seidel. Interactive multi-resolution modeling on arbitrary meshes. *Proceedings of the 25th annual conference on Computer graphics and interactive techniques*. 1998
- [5] 刘新国, 鲍虎军, 彭群生. 多边形网格的平滑除噪声算法. *自然科学进展*, 2000, 08: 746-750
Liu Xinguo, Bao Hujun, Peng Qunsheng. A smoothing and denoising polygonal mesh algorithm. *Progress in Natural Science(in Chinese)*, 2000, 08: 746-750
- [6] C L Bajaj, G Xu. Anisotropic diffusion of surfaces and functions on surfaces. *ACM Trans. Graph.*, 2003, 22: 4-32
- [7] U Clarenz, U Diewald, M Rumpf. Anisotropic geometric diffusion in surface processing. *Proceedings of the conference on Visualization '00*. Salt Lake City, Utah, United States, 2000
- [8] K Hildebrandt, K Polthier. Anisotropic filtering of non-linear surface features. *Computer Graphics Forum*, 2004, 23: 391--400
- [9] S Fleishman, I Drori, D Cohen-Or. Bilateral mesh denoising. *ACM SIGGRAPH 2003 Papers*. San Diego, California, 2003
- [10] J Peng, V Strela, D Zorin. A simple algorithm for surface denoising. *Proceedings of the conference on Visualization '01*. San Diego, California, 2001
- [11] L Liu, C-L Tai, Z Ji, G Wang. Non-iterative approach for global mesh optimization. *Comput. Aided Des.*, 2007, 39: 772-782
- [12] K Hildebrandt, K Polthier. Constraint-based fairing of surface meshes. *Proceedings of the fifth Eurographics symposium on Geometry processing*. Barcelona, Spain, 2007
- [13] S N Kersey. On the problems of smoothing and near-interpolation. *Math. Comput.*, 2003, 72: 1873-1885