Michael Sagraloff
Michael Hoff

Sommersemester 2016

Mathematik für Informatiker 2

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/summer16/mathematik2/

Blatt 5 — Abgabe: Mittwoch, 25. Mai

Aufgabe 1. (a) Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität:

(i) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (24x_1 - 5x_2, 17x_1 + 2x_2)$,

(ii) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1^2 - x_2, x_1 - x_2^2)$,

(iii) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto (x_1 - 5, x_1 + x_2 + 1)$,

(iv) $\mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2, f \mapsto (f(0,1), f(1,0))$.

(b) Sei K ein Körper und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen zwei endlich dimensionalen K-Vektorräumen derselben Dimension. Zeigen Sie: f ist injektiv $\Leftrightarrow$ f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ f ist bijektiv.

Aufgabe 2. Seien

$$U := \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad W := \left\langle \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Unterräume des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie eine Basis des Unterraums $U \cap W$.

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Die *Vandermondsche Matrix*

$$A := \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \alpha_0^2 & \dots & \alpha_0^d \\ 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 & \dots & \alpha_1^d \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_d & \alpha_d^2 & \dots & \alpha_d^d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(d+1)\times(d+1)}$$

ist genau dann invertierbar, wenn $\alpha_0, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden sind.
(Hinweis: Ein nicht-triviales Polynom vom Grad $\leq n$ hat höchstens n Nullstellen.)

Sei $A \in K^{n\times n}$ eine $n \times n$ Matrix mit Einträgen in einem Körper K. Wir nennen die Matrix A *regulär*, falls ihre Spalten (oder äquivalent ihre Zeilen) linear unabhängig sind. Andernfalls nennen wir A *singulär*. Des Weiteren sagen wir, dass eine reguläre Matrix A eine *LR-Zerlegung* besitzt, falls eine *linke* untere Dreiecksmatrix $L = (l_{ij})$ und eine *rechte* obere Dreiecksmatrix $R = (r_{ij})$ existieren, so dass

$$A = L \cdot R = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ l_{n1} & \dots & l_{nn-1} & l_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ 0 & r_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & r_{n-1n} \\ 0 & \dots & 0 & r_{nn} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. (a) Sei $A \in K^{n\times n}$ eine reguläre Matrix. Beweisen Sie, dass die LR-Zerlegung, falls sie existiert, eindeutig ist, wenn wir $l_{ii} = 1$ für $i = 1, \ldots, n$ fordern.

(b) Sei $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 9 & 10 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

(i) Zeigen Sie, dass A regulär ist.

(ii) Zeigen Sie, dass A keine LR-Zerlegung besitzt.

Aufgabe 5 (Zusatzpunkte)**.** Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix und sei $\widetilde{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Matrix, die nach der ersten Iteration des Gauß-Algorithmus' ensteht, d.h.

$$\widetilde{A} = \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{a}_{11} & \\ \hline 0 & \\ \vdots & A^{(1)} \\ 0 & \end{array}\right) \quad \text{und } A^{(1)} \in K^{(n-1)\times(n-1)}.$$

Für eine beliebige Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $k \in \{1, \ldots, n\}$, bezeichnen wir mit $M_k = (m_{ij})_{1\le i,j\le k} \in \mathbb{R}^{k\times k}$ die obere linke $k \times k$ Untermatrix von M.

(a) Zeigen Sie: wenn alle A_k für $k = 1, \ldots, n$ regulär sind, dann sind auch alle $A_k^{(1)}$ für $k = 1, \ldots, n-1$ regulär.

(b) Folgern Sie, dass der Gauß-Algorithmus (ohne Zeilenvertauschung) eine LR-Zerlegung für eine Matrix A liefert, falls alle A_k für $k = 1, \ldots, n$ regulär sind.