Michael Sagraloff
Michael Hoff

Sommersemester 2016

Mathematik für Informatiker 2

https://www.mpi-inf.mpg.de/departments/algorithms-complexity/teaching/summer16/mathematik2/

Blatt 9 — Abgabe: Mittwoch, 22. Juni

Aufgabe 1. Sei $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ ein Polynom vom Grad n. Zeigen Sie, dass f als Determinante einer Matrix geschrieben werden kann, indem Sie die Determinante der folgenden Matrix berechnen.

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} & x + a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

Aufgabe 2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren:

$$f_n \colon \mathbb{R}[x]_{\leq n} \to \mathbb{R}[x]_{\leq n}, \quad p \mapsto (p \cdot x)',$$

wobei q' die Ableitung eines Polynoms $q \in \mathbb{R}[x]$ ist. Zeigen Sie, dass f_n ein Endomorphismus ist. Berechnen Sie die Determinante von f_5.

Aufgabe 3. (a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: $A^3 - 6A^2 + 10A - 4E_3 = 0$, wobei $E_3 \in K^{3\times 3}$ die Einheitsmatrix ist.

(b) Sei nun $A \in K^{n\times n}$ beliebig. Zeigen Sie: Es existiert ein Polynom $P(t) = b_r t^r + \cdots + b_1 t + b_0 \in K[t]$, so dass: $b_r A^r + \cdots + b_1 A + b_0 E_n = 0$, wobei $E_n \in K^{n\times n}$ die Einheitsmatrix ist.

Aufgabe 4. Seien $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ und $R = (r_1, r_2)$ drei Punkte im $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid \det \begin{pmatrix} p_1^2 + p_2^2 & p_1 & p_2 & 1 \\ q_1^2 + q_2^2 & q_1 & q_2 & 1 \\ r_1^2 + r_2^2 & r_1 & r_2 & 1 \\ x_1^2 + x_2^2 & x_1 & x_2 & 1 \end{pmatrix} = 0\}$$

einen Kreis durch die drei Punkte definiert, falls diese nicht auf einer Geraden liegen.