LR Zerlegung

Michael Sagraloff

max planck institut
informatik

Beispiel eines linearen Gleichungssystems in der Ökonomie (Input-Output Analyse)

- Wir nehmen an, dass es 3 Güter G_1, G_2, und G_3 gibt. Dann entspricht der Eintrag $a_{i,j}$ der sogenannten Input-Output Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

  der Anzahl der Einheiten des Gutes G_i, die zur Produktion einer Einheit des Gutes G_j benötigt werden.
- Der Endbedarf des Marktes an Gut G_i sei b_i, mit

$$\mathbf{b} := (b_1, b_2, b_3)^t := (24, 64, 36)^t.$$

- Wieviele Einheiten x_i von G_i müssen insgesamt hergestellt werden?
- Die Lösung ergibt sich aus dem Gleichungssystem

$$A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{x} \Longleftrightarrow (\mathrm{Id}_3 - A) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Beispiel eines linearen Gleichungssystems in der Ökonomie (Input-Output Analyse)

- Wir nehmen an, dass es 3 Güter G_1, G_2, und G_3 gibt. Dann entspricht der Eintrag $a_{i,j}$ der sogenannten Input-Output Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,4} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.4 & 0 \end{pmatrix}$$

  der Anzahl der Einheiten des Gutes G_i, die zur Produktion einer Einheit des Gutes G_j benötigt werden.
- Der Endbedarf des Marktes an Gut G_i sei b_i, mit

$$\mathbf{b} := (b_1, b_2, b_3)^t := (24, 64, 36)^t.$$

- Wieviele Einheiten x_i von G_i müssen insgesamt hergestellt werden?
- Die Lösung ergibt sich aus dem Gleichungssystem

$$A \cdot \mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{x} \Longleftrightarrow (\mathrm{Id}_3 - A) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

Input-Output Analyse

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ -0.2 & 1 & 0 \\ -0.4 & -0.4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 64 \\ 36 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x_1 - 0.2x_2 - 0.4x_3 = 24 \\ -0.2x_1 + x_2 = 64 \\ -0.4x_1 - 0.4x_2 + x_3 = 36 \end{array}$$

- Elimination von Variablen durch Abziehen entsprechender Vielfache einer Gleichung von einer anderen (*Gauß Elimination*):

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ -0.2 & 1 & 0 \\ -0.4 & -0.4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 64 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ 0\ (-0.2) & 0.96 & -0.08 \\ 0\ (-0.4) & -0.48 & 0.84 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 68.8 \\ 45.6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ 0\ (-0.2) & 0.96 & -0.08 \\ 0\ (-0.4) & 0\ (-0.5) & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 68.8 \\ 80 \end{pmatrix}$$

- Rückwärtseinsetzen: $x_3 = 100$, $x_2 = -\frac{(68.8+0.08\cdot x_3)}{0.96} = 80$, und $x_1 = 24 + 0.2 \cdot x_2 + 0.4 \cdot x_3 = 80.$

Input-Output Analyse

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ -0.2 & 1 & 0 \\ -0.4 & -0.4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 64 \\ 36 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x_1 - 0.2x_2 - 0.4x_3 = 24 \\ -0.2x_1 + x_2 = 64 \\ -0.4x_1 - 0.4x_2 + x_3 = 36 \end{array}$$

- Elimination von Variablen durch Abziehen entsprechender Vielfache einer Gleichung von einer anderen (*Gauß Elimination*):

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ -0.2 & 1 & 0 \\ -0.4 & -0.4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 64 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ 0\ (-0.2) & 0.96 & -0.08 \\ 0\ (-0.4) & -0.48 & 0.84 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 68.8 \\ 45.6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ 0\ (-0.2) & 0.96 & -0.08 \\ 0\ (-0.4) & 0\ (-0.5) & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 68.8 \\ 80 \end{pmatrix}$$

- Rückwärtseinsetzen: $x_3 = 100$, $x_2 = -\frac{(68.8+0.08\cdot x_3)}{0.96} = 80$, und $x_1 = 24 + 0.2 \cdot x_2 + 0.4 \cdot x_3 = 80$.

Input-Output Analyse

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ -0.2 & 1 & 0 \\ -0.4 & -0.4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 64 \\ 36 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 - 0.2x_2 - 0.4x_3 &= 24 \\ -0.2x_1 + x_2 &= 64 \\ -0.4x_1 - 0.4x_2 + x_3 &= 36 \end{aligned}$$

- Elimination von Variablen durch Abziehen entsprechender Vielfache einer Gleichung von einer anderen (*Gauß Elimination*):

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ -0.2 & 1 & 0 \\ -0.4 & -0.4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 64 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ 0\ (-0.2) & 0.96 & -0.08 \\ 0\ (-0.4) & -0.48 & 0.84 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 68.8 \\ 45.6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ 0\ (-0.2) & 0.96 & -0.08 \\ 0\ (-0.4) & 0\ (-0.5) & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 68.8 \\ 80 \end{pmatrix}$$

- Rückwärtseinsetzen: $x_3 = 100$, $x_2 = -\frac{(68.8+0.08\cdot x_3)}{0.96} = 80$, und $x_1 = 24 + 0.2 \cdot x_2 + 0.4 \cdot x_3 = 80$.

Input-Output Analyse

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ -0.2 & 1 & 0 \\ -0.4 & -0.4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 64 \\ 36 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{c} x_1 - 0.2x_2 - 0.4x_3 = 24 \\ -0.2x_1 + x_2 = 64 \\ -0.4x_1 - 0.4x_2 + x_3 = 36 \end{array}$$

- Elimination von Variablen durch Abziehen entsprechender Vielfache einer Gleichung von einer anderen (*Gauß Elimination*):

$$\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ -0.2 & 1 & 0 \\ -0.4 & -0.4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 64 \\ 36 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ 0\ (-0.2) & 0.96 & -0.08 \\ 0\ (-0.4) & -0.48 & 0.84 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 68.8 \\ 45.6 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ 0\ (-0.2) & 0.96 & -0.08 \\ 0\ (-0.4) & 0\ (-0.5) & 0.8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 68.8 \\ 80 \end{pmatrix}$$

- Rückwärtseinsetzen: $x_3 = 100$, $x_2 = -\frac{(68.8+0.08\cdot x_3)}{0.96} = 80$, und $x_1 = 24 + 0.2 \cdot x_2 + 0.4 \cdot x_3 = 80$.

Input-Output Analyse

- Man rechnet leicht nach, dass

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.2 & 1 & 0 \\ -0.4 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ 0 & 0.96 & -0.08 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}}_{R},$$

  d.h. A lässt sich als Produkt zweier Dreiecksmatrizen L und R schreiben. Das ist kein Zufall!
- Beachte: Die Matrix A ist üblicherweise viel größer!
- Beispiel für das Auftreten eines sehr großen linearen Gleichungssystems in der Medizin: Computertomographie

Input-Output Analyse

- Man rechnet leicht nach, dass

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.2 & 1 & 0 \\ -0.4 & -0.5 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -0.2 & -0.4 \\ 0 & 0.96 & -0.08 \\ 0 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}}_{R},$$

  d.h. A lässt sich als Produkt zweier Dreiecksmatrizen L und R schreiben. Das ist kein Zufall!

- Beachte: Die Matrix A ist üblicherweise viel größer!
- Beispiel für das Auftreten eines sehr großen linearen Gleichungssystems in der Medizin: Computertomographie

Problemstellung 1

Gegeben eine $n \times n$ Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^{n \times n}$$

über einem Körper $\mathbb{K}$ (üblicherweise $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), bestimme **Links**- bzw. **Rechts**dreiecksmatrizen

$$L = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad R = \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & \cdots & r_{1,n} \\ 0 & r_{2,2} & \cdots & r_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r_{n,n} \end{pmatrix}$$

mit Einträgen $l_{i,j} \in \mathbb{K}$ und $r_{i,j} \in \mathbb{K}$, so dass $A = L \cdot R$.

Sinnvolle Fragestellung?

(a) Eindeutigkeit?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 3 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R}$$

(b) Existenz?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 9 & 10 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{2,2} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

Sinnvolle Fragestellung?

(a) Eindeutigkeit?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 3 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{L'} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{R'}$$

(b) Existenz?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 9 & 10 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{2,2} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

Sinnvolle Fragestellung?

(a) Eindeutigkeit?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 3 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{L'} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{R'}$$

(b) Existenz?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 9 & 10 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{2,2} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

Sinnvolle Fragestellung?

(a) Eindeutigkeit?

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 6 & 3 \\ 9 & 10 & 3 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}}_{L'} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}}_{R'}$$

(b) Existenz?

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 9 & 10 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & 0 \\ l_{3,1} & l_{3,2} & l_{3,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} & r_{1,3} \\ 0 & r_{2,2} & r_{2,3} \\ 0 & 0 & r_{3,3} \end{pmatrix}$$

Es gilt $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ 0 & r_{2,2} \end{pmatrix}$, und daher ist einer der beiden 2×2-Matrizen auf der rechten Seite der Gleichung singulär. Somit gilt auch $\det A = 0$ $\lightning$

Was ist hinsichtlich der Existenz schiefgegangen?

- Auch wenn A regulär ist, kann eine der $i \times i$-Untermatrizen

  $$A^{[i]} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{1,i} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,i} \end{pmatrix}$$

  singulär sein, d.h. der *i-te Hauptminor* $\det A^{[i]}$ verschwindet. Dann existiert keine LR-Zerlegung wie in Problemstellung 1.

Was ist hinsichtlich der Existenz schiefgegangen?

- Auch wenn A regulär ist, kann eine der $i \times i$-Untermatrizen

$$A^{[i]} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{1,i} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,i} \end{pmatrix}$$

  singulär sein, d.h. der *i-te Hauptminor* $\det A^{[i]}$ verschwindet. Dann existiert keine LR-Zerlegung wie in Problemstellung 1.
- geeignete Umsortierung der Zeilen: $\det A^{[i]} \neq 0$ für alle i.

Was ist hinsichtlich der Existenz schiefgegangen?

- Auch wenn A regulär ist, kann eine der $i \times i$-Untermatrizen

$$A^{[i]} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{1,i} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,i} \end{pmatrix}$$

  singulär sein, d.h. der *i-te Hauptminor* $\det A^{[i]}$ verschwindet. Dann existiert keine LR-Zerlegung wie in Problemstellung 1.
- geeignete Umsortierung der Zeilen: $\det A^{[i]} \neq 0$ für alle i.

Hauptsatz

Falls A regulär ist, gibt es eine (Zeilen-) Permutationsmatrix $P \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und eindeutig bestimmte Matrizen L und R wie in Problemstellung 1 angegeben, so dass

- $l_{i,i} = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$, und
- $P \cdot A = L \cdot R$.

Hauptsatz

- Noch einmal zurück zum Beispiel:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 9 & 10 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Der Beweis des Hauptsatzes ist konstruktiv und liefert einen Algorithmus zur Bestimmung von P, L, und R.

  (A) Im ersten Schritt behandeln wir nur den Spezialfall, in dem alle Hauptminoren von A nicht verschwinden. In diesem Fall können wir $P = \mathrm{Id}_n$ wählen.

  (B) Im zweiten Schritt zeigen wir, wie der allgemeine Fall durch eine entsprechende Umsortierung der Zeilen auf (1) zurückgeführt werden kann; Verfahren wird nur anhand eines Bsp. verdeutlicht; Beweis findet sich im Anhang.

Warum will man eine LR-Zerlegung berechnen?

- Berechnung der Determinante einer Matrix:

$$\det(A) = \det(P)^{-1} \cdot \det(L) \cdot \det(R) =$$

Warum will man eine LR-Zerlegung berechnen?

- Berechnung der Determinante einer Matrix:

$$\det(A) = \det(P)^{-1} \cdot \det(L) \cdot \det(R) = (-1)^v \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{i,i},$$

wobei v die Anzahl der Zeilenwechsel bezeichnet, die bei Anwendung mit P herbeigeführt werden.

Warum will man eine LR-Zerlegung berechnen?

- Berechnung der Determinante einer Matrix:

$$\det(A) = \det(P)^{-1} \cdot \det(L) \cdot \det(R) = (-1)^v \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{i,i},$$

  wobei v die Anzahl der Zeilenwechsel bezeichnet, die bei Anwendung mit P herbeigeführt werden.

- Lösen eines linearen Gleichungssystems: Bestimme $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, so dass

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad ,$$

  wobei $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ ein gegebener Vektor ist;

Warum will man eine LR-Zerlegung berechnen?

- Berechnung der Determinante einer Matrix:

$$\det(A) = \det(P)^{-1} \cdot \det(L) \cdot \det(R) = (-1)^v \cdot \prod_{i=1}^{n} r_{i,i},$$

  wobei v die Anzahl der Zeilenwechsel bezeichnet, die bei Anwendung mit P herbeigeführt werden.

- Lösen eines linearen Gleichungssystems: Bestimme $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$, so dass

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad \Leftrightarrow P \cdot A \cdot \mathbf{x} = P \cdot \mathbf{b} \Leftrightarrow L \cdot \underbrace{(R \cdot \mathbf{x})}_{\mathbf{y}} = \underbrace{P \cdot \mathbf{b}}_{\mathbf{b}'},$$

  wobei $\mathbf{b} \in \mathbb{K}^n$ ein gegebener Vektor ist; Das Lösen dieses Systems reduziert sich dann auf das iterative Lösen der Gleichungssyteme $L \cdot \mathbf{y} = \mathbf{b}'$ und $R \cdot \mathbf{x} = \mathbf{y}$ in Dreiecksform.

Beweis des Hauptsatzes, Teil A (Induktion über n)

- Wir nehmen an, dass $\det A^{[i]} \neq 0$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Insbesondere gilt also auch $a_{1,1} \neq 0$.
- Für alle $i = 2, \ldots, n$, subtrahiere das $l_{i,1}$-fachen der ersten Zeile von der i-ten Zeile, wobei $l_{i,1} := \frac{a_{i,1}}{a_{1,1}}$:

$$\begin{array}{c} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{a_{1,1}} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \mathbf{a_{2,1}} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{a_{n,1}} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \xrightarrow{Z_i' = Z_i - l_{i,1} \cdot Z_1} \begin{array}{c} Z_1' \\ Z_2' \\ \vdots \\ Z_n' \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{a_{1,1}} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ \mathbf{0} & a'_{2,2} & \cdots & a'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & a'_{n,2} & \cdots & a'_{n,n} \end{pmatrix},$$

- Die Zeilenoperationen lassen sich als Matrixmultiplikation $L_1 \cdot A$ darstellen, wobei

$$L_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -l_{n,1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Beweis des Hauptsatzes, Teil A

- Alle Hauptminoren der $(n-1) \times (n-1)$-Matrix

$$A' := \begin{pmatrix} a'_{2,2} & a'_{2,3} & \cdots & a'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{n,2} & a'_{n,3} & \cdots & a'_{n,n} \end{pmatrix}$$

  sind von 0 verschieden da die Zeilenoperationen die Determinante einer beliebigen $k \times k$-Untermatrix von A nicht verändert und daher $\det A^{[i+1]} = a_{1,1} \cdot \det(A')^{[i]}$ gilt.

- Nach Induktionsannahme gibt es Dreiecksmatrizen $L' = (l'_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n-1}$ und $R' = (r'_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n-1}$ mit $A' = L' \cdot R'$ und $l'_{i,i} = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$, und somit gilt:

$$L_1 \cdot A := \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l'_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & l'_{n-1,1} & \cdots & l'_{n-1,n-1} \end{pmatrix}}_{=:\hat{L}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{n,n} \\ 0 & r'_{1,1} & \cdots & r'_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r'_{n-1,n-1} \end{pmatrix}}_{=:R}$$

Beweis des Hauptsatzes, Teil A

- Alle Hauptminoren der $(n-1) \times (n-1)$-Matrix

$$A' := \begin{pmatrix} a'_{2,2} & a'_{2,3} & \cdots & a'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{n,2} & a'_{n,3} & \cdots & a'_{n,n} \end{pmatrix}$$

  sind von 0 verschieden da die Zeilenoperationen die Determinante einer beliebigen $k \times k$-Untermatrix von A nicht verändert und daher $\det A^{[i+1]} = a_{1,1} \cdot \det(A')^{[i]}$ gilt.

- Nach Induktionsannahme gibt es Dreiecksmatrizen $L' = (l'_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n-1}$ und $R' = (r'_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n-1}$ mit $A' = L' \cdot R'$ und $l'_{i,i} = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n-1$, und somit gilt:

$$L_1 \cdot A := \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l'_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & l'_{n-1,1} & \cdots & l'_{n-1,n-1} \end{pmatrix}}_{=:\hat{L}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{n,n} \\ 0 & r'_{1,1} & \cdots & r'_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r'_{n-1,n-1} \end{pmatrix}}_{=:R}$$

Beweis des Hauptsatzes, Teil A

- Wir erhalten somit die Zerlegung $A = L \cdot R$, wobei

$$L = L_1^{-1} \cdot \hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n,1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l'_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & l'_{n-1,1} & \cdots & l'_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l'_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_{n,1} & l'_{n-1,1} & \cdots & l'_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

  und $l'_{i,i} = 1$ für alle i nach Induktionsvoraussetzung.

- Übungsaufgabe: Zeige die Eindeutigkeit der Zerlegung!
- Beachte, dass bei iterativer Anwendung des Verfahrens die Matrizen L und R direkt bestimmt werden $\longrightarrow$ Beispiel

Beispiel einer LR Zerlegung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{5} & 2 & -1 & 0 \\ \mathbf{2} & 5 & 0 & 1 \\ \mathbf{-1} & 0 & 5 & -2 \\ \mathbf{0} & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}}_{A_0:=A} \xrightarrow{L_1\cdot} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\frac{21}{5}} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & \mathbf{\frac{2}{5}} & \frac{24}{5} & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 5 \end{pmatrix}}_{A_1} \xrightarrow{L_2\cdot} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{21}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{\frac{100}{21}} & -\frac{44}{21} \\ 0 & 0 & \mathbf{-\frac{44}{21}} & \frac{100}{21} \end{pmatrix}}_{A_2}$$

$$\xrightarrow{L_3\cdot} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{21}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{100}{21} & -\frac{44}{21} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{96}{25} \end{pmatrix}}_{A_3=:R}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{\frac{2}{5}} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-\frac{1}{5}} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{L}_1=L_1^{-1}} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \mathbf{\frac{2}{21}} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\frac{5}{21}} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{L}_2=\hat{L}_1\cdot L_2^{-1}} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{21} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \frac{5}{21} & \mathbf{-\frac{44}{100}} & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{L}_3=:\hat{L}_2\cdot L_3^{-1}}$$

Beachte, dass wir die Einträge der Matrix L (bzw. $\hat{L}_i$) direkt in die freiwerdenden Stellen der Matrizen A_i speichern können.

Beispiel einer LR Zerlegung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{5} & 2 & -1 & 0 \\ \mathbf{2} & 5 & 0 & 1 \\ \mathbf{-1} & 0 & 5 & -2 \\ \mathbf{0} & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}}_{A_0 := A} \xrightarrow{L_1\cdot} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\frac{21}{5}} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & \mathbf{\frac{2}{5}} & \frac{24}{5} & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 5 \end{pmatrix}}_{A_1} \xrightarrow{L_2\cdot} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{21}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{\frac{100}{21}} & -\frac{44}{21} \\ 0 & 0 & \mathbf{-\frac{44}{21}} & \frac{100}{21} \end{pmatrix}}_{A_2}$$

$$\xrightarrow{L_3\cdot} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{21}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{100}{21} & -\frac{44}{21} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{96}{25} \end{pmatrix}}_{A_3 =: R}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{\frac{2}{5}} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-\frac{1}{5}} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{L}_1 = L_1^{-1}} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \mathbf{\frac{2}{21}} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\frac{5}{21}} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{L}_2 = \hat{L}_1 \cdot L_2^{-1}} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{21} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \frac{5}{21} & \mathbf{-\frac{44}{100}} & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{L}_3 =: \hat{L}_2 \cdot L_3^{-1}}$$

Beachte, dass wir die Einträge der Matrix L (bzw. $\hat{L}_i$) direkt in die freiwerdenden Stellen der Matrizen A_i speichern können.

Beispiel einer LR Zerlegung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}}_{A_0:=A} \xrightarrow{L_1\cdot} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{21}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{24}{5} & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}}_{A_1} \xrightarrow{L_2\cdot} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{21}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{100}{21} & -\frac{44}{21} \\ 0 & 0 & -\frac{44}{21} & \frac{100}{21} \end{pmatrix}}_{A_2}$$

$$\xrightarrow{L_3\cdot} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{21}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{100}{21} & -\frac{44}{21} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{96}{25} \end{pmatrix}}_{A_3=:R}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{L}_1=L_1^{-1}} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{21} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{21} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{L}_2=\hat{L}_1\cdot L_2^{-1}} \to \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{21} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{5}{21} & -\frac{44}{100} & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{L}_3=:\hat{L}_2\cdot L_3^{-1}}$$

Beachte, dass wir die Einträge der Matrix L (bzw. $\hat{L}_i$) direkt in die freiwerdenden Stellen der Matrizen A_i speichern können.

Beispiel einer LR Zerlegung

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{5} & 2 & -1 & 0 \\ \mathbf{2} & 5 & 0 & 1 \\ \mathbf{-1} & 0 & 5 & -2 \\ \mathbf{0} & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}}_{A_0:=A}
\xrightarrow{L_1\cdot}
\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\frac{21}{5}} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & \mathbf{\frac{2}{5}} & \frac{24}{5} & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 5 \end{pmatrix}}_{A_1}
\xrightarrow{L_2\cdot}
\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{21}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{\frac{100}{21}} & -\frac{44}{21} \\ 0 & 0 & \mathbf{-\frac{44}{21}} & \frac{100}{21} \end{pmatrix}}_{A_2}
$$

$$
\xrightarrow{L_3\cdot}
\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{21}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{100}{21} & -\frac{44}{21} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{96}{25} \end{pmatrix}}_{A_3=:R}
$$

$$
\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{\frac{2}{5}} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-\frac{1}{5}} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{L}_1=L_1^{-1}}
\rightarrow
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \mathbf{\frac{2}{21}} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\frac{5}{21}} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{L}_2=\hat{L}_1\cdot L_2^{-1}}
\rightarrow
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{21} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \frac{5}{21} & \mathbf{-\frac{44}{100}} & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{L}_3=:\hat{L}_2\cdot L_3^{-1}}
$$

Beachte, dass wir die Einträge der Matrix L (bzw. $\hat{L}_i$) direkt in die freiwerdenden Stellen der Matrizen A_i speichern können.

Beispiel einer LR Zerlegung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{5} & 2 & -1 & 0 \\ \mathbf{2} & 5 & 0 & 1 \\ \mathbf{-1} & 0 & 5 & -2 \\ \mathbf{0} & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}}_{A_0 := A} \overset{L_1\cdot}{\rightarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\frac{21}{5}} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & \mathbf{\frac{2}{5}} & \frac{24}{5} & -2 \\ 0 & \mathbf{1} & -2 & 5 \end{pmatrix}}_{A_1} \overset{L_2\cdot}{\rightarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{21}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{\frac{100}{21}} & -\frac{44}{21} \\ 0 & 0 & \mathbf{-\frac{44}{21}} & \frac{100}{21} \end{pmatrix}}_{A_2}$$

$$\overset{L_3\cdot}{\rightarrow} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \frac{21}{5} & \frac{2}{5} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{100}{21} & -\frac{44}{21} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{96}{25} \end{pmatrix}}_{A_3 =: R}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{\frac{2}{5}} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbf{-\frac{1}{5}} & 0 & 1 & 0 \\ \mathbf{0} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{L}_1 = L_1^{-1}} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \mathbf{\frac{2}{21}} & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{\frac{5}{21}} & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{L}_2 = \hat{L}_1 \cdot L_2^{-1}} \rightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{5} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{21} & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & \frac{5}{21} & \mathbf{-\frac{44}{100}} & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{L}_3 =: \hat{L}_2 \cdot L_3^{-1}}$$

Beachte, dass wir die Einträge der Matrix L (bzw. $\hat{L}_i$) direkt in die freiwerdenden Stellen der Matrizen A_i speichern können.

Algorithmus in Pseudocode

Algorithm 1: LR

Eingabe : Matrix $A = (a_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit $\det A^{[i]} \neq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$.
Ausgabe : Untere Dreiecksmatrix $L \in \mathbb{K}^{n\times n}$ mit Einseinträgen auf der Diagonalen und obere Dreiecksmatrix $R \in \mathbb{K}^{n\times n}$, so dass $A = L \cdot R$.

$L := (l_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} := \mathrm{Id}_n$
$R := (r_{i,j})_{i,j=1,\dots,n} := A$
for $j \leftarrow 1$ **to** $n-1$ **do**
    for $i \leftarrow j+1$ **to** n **do**
        $l_{i,j} := \frac{a_{i,j}}{a_{j,j}}$
        for $k \leftarrow j$ **to** n **do**
            $r_{i,k} := r_{i,k} - l_{i,j} \cdot r_{i,j}$
        end
    end
end
return $(L, R) := ((l_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}, (r_{i,j})_{i,j=1,\dots,n})$

Algorithmische Komplexität

LR-Zerlegung:

- In der j-ten Iteration benötigen wir $n - j$ Divisionen zur Berechnung der Quotienten $l_{i,j}$ für $i = j + 1, \ldots, n$, sowie jeweils $(n - j)^2$ Additionen und Multiplikationen für die Zeilenoperationen.
- Summation über $j = 1, \ldots, n$ liefert

$$2 \cdot \sum_{j=1}^{n} (n-j) \cdot (n-j+1) < 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} j^2 = 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \approx \frac{2n^3}{3}.$$

Lösen eine Gleichungssystems durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen unter Verwendung der LR-Zerlegung:

- Eine Division und jeweils $n - j$ Additionen und Multiplikationen im j-ten Schritt
- Arithmetische Komplexität is also beschränkt durch

$$2 \cdot \sum_{j=1}^{n} (2(n-j)+1) = 2n(n-1) + 2n = 2n^2$$

Algorithmische Komplexität

LR-Zerlegung:

- In der j-ten Iteration benötigen wir $n - j$ Divisionen zur Berechnung der Quotienten $l_{i,j}$ für $i = j + 1, \ldots, n$, sowie jeweils $(n - j)^2$ Additionen und Multiplikationen für die Zeilenoperationen.
- Summation über $j = 1, \ldots, n$ liefert

$$2 \cdot \sum_{j=1}^{n} (n-j) \cdot (n-j+1) < 2 \cdot \sum_{j=1}^{n} j^2 = 2 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \approx \frac{2n^3}{3}.$$

Lösen eine Gleichungssystems durch Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen unter Verwendung der LR-Zerlegung:

- Eine Division und jeweils $n - j$ Additionen und Multiplikationen im j-ten Schritt
- Arithmetische Komplexität is also beschränkt durch

$$2 \cdot \sum_{j=1}^{n} (2(n-j) + 1) = 2n(n-1) + 2n = 2n^2$$

Zusammenhang mit dem Gauß-Algorithmus

Beachte, dass das Gleichungssytem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ auch direkt gelöst werden kann; siehe dazu auch das Beispiel vom Anfang:

- Alle Operationen, die auf A ausgeführt werden, werden parallel auf dem Vektor **b** ausgeführt
- Lösung des so erhaltenen Dreieckssystems bleibt invariant und kann durch Rückwärtseinsetzen gewonnen werden.
- Vorteil der direkten Berechnung einer LR Zerlegung:
  Bei gegebener LR Zerlegung kann man die Lösung für ein gegebenes **b** in quadratischer Laufzeit bestimmen, wohingegen der Gaußalgorithmus kubische Laufzeit hat.

Zur Implementierung

- Exakte Berechnung über $\mathbb{Q}$ (eher theoretisch interessant):
  - polynomielle Laufzeit des Algorithmus ist nicht trivial!
  - Zwischenergebnisse lassen sich als Quotienten von Determinanten geeigneter Untermatrizen schreiben.
- Bei der Implementierung des Algorithmus wird üblicherweise Fließkommaarithmetik verwendet (d.h. *single* oder *double precision* in IEEE754 Format) $\Rightarrow$ **Rechenfehler!?**
- Wahl des Pivotelements ist entscheidend für die numerische Stabilität des Verfahrens
- Aufgrund der kubischen Laufzeit wird der Algorithmus nur für kleine und mittelgroße Matrizen (d.h. $n \leq 10000$) verwendet.
- Speicherbedarf bei $n = 10^4$: 10^8 Einträgen a 64 bit $\approx$ 1 GB
- integriert in den LA Bibliotheken **NAG**, **IMSL**, und **LAPACK**.

Zur Implementierung

- Exakte Berechnung über $\mathbb{Q}$ (eher theoretisch interessant):
  - polynomielle Laufzeit des Algorithmus ist nicht trivial!
  - Zwischenergebnisse lassen sich als Quotienten von Determinanten geeigneter Untermatrizen schreiben.
- Bei der Implementierung des Algorithmus wird üblicherweise Fließkommaarithmetik verwendet (d.h. *single* oder *double precision* in IEEE754 Format) $\Rightarrow$ **Rechenfehler!?**
- Wahl des Pivotelements ist entscheidend für die numerische Stabilität des Verfahrens
- Aufgrund der kubischen Laufzeit wird der Algorithmus nur für kleine und mittelgroße Matrizen (d.h. $n \leq 10000$) verwendet.
- Speicherbedarf bei $n = 10^4$: 10^8 Einträgen a 64 bit $\approx$ 1 GB
- integriert in den LA Bibliotheken **NAG**, **IMSL**, und **LAPACK**.

Zur Implementierung

- Exakte Berechnung über $\mathbb{Q}$ (eher theoretisch interessant):
  - polynomielle Laufzeit des Algorithmus ist nicht trivial!
  - Zwischenergebnisse lassen sich als Quotienten von Determinanten geeigneter Untermatrizen schreiben.
- Bei der Implementierung des Algorithmus wird üblicherweise Fließkommaarithmetik verwendet (d.h. *single* oder *double precision* in IEEE754 Format) $\Rightarrow$ **Rechenfehler!?**
- Wahl des Pivotelements ist entscheidend für die numerische Stabilität des Verfahrens
- Aufgrund der kubischen Laufzeit wird der Algorithmus nur für kleine und mittelgroße Matrizen (d.h. $n \leq 10000$) verwendet.
- Speicherbedarf bei $n = 10^4$: 10^8 Einträgen a 64 bit $\approx$ 1 GB
- integriert in den LA Bibliotheken **NAG**, **IMSL**, und **LAPACK**.

Zur Implementierung

- Exakte Berechnung über $\mathbb{Q}$ (eher theoretisch interessant):
  - polynomielle Laufzeit des Algorithmus ist nicht trivial!
  - Zwischenergebnisse lassen sich als Quotienten von Determinanten geeigneter Untermatrizen schreiben.
- Bei der Implementierung des Algorithmus wird üblicherweise Fließkommaarithmetik verwendet (d.h. *single* oder *double precision* in IEEE754 Format) $\Rightarrow$ **Rechenfehler!?**
- Wahl des Pivotelements ist entscheidend für die numerische Stabilität des Verfahrens
- Aufgrund der kubischen Laufzeit wird der Algorithmus nur für kleine und mittelgroße Matrizen (d.h. $n \leq 10000$) verwendet.
- Speicherbedarf bei $n = 10^4$: 10^8 Einträgen a 64 bit $\approx$ 1 GB
- integriert in den LA Bibliotheken **NAG**, **IMSL**, und **LAPACK**.

Zur Implementierung

- Exakte Berechnung über $\mathbb{Q}$ (eher theoretisch interessant):
  - polynomielle Laufzeit des Algorithmus ist nicht trivial!
  - Zwischenergebnisse lassen sich als Quotienten von Determinanten geeigneter Untermatrizen schreiben.
- Bei der Implementierung des Algorithmus wird üblicherweise Fließkommaarithmetik verwendet (d.h. *single* oder *double precision* in IEEE754 Format) $\Rightarrow$ **Rechenfehler!?**
- Wahl des Pivotelements ist entscheidend für die numerische Stabilität des Verfahrens
- Aufgrund der kubischen Laufzeit wird der Algorithmus nur für kleine und mittelgroße Matrizen (d.h. $n \leq 10000$) verwendet.
- Speicherbedarf bei $n = 10^4$: 10^8 Einträgen a 64 bit $\approx$ 1 GB
- integriert in den LA Bibliotheken **NAG**, **IMSL**, und **LAPACK**.

Zur Implementierung

- Exakte Berechnung über $\mathbb{Q}$ (eher theoretisch interessant):
  - polynomielle Laufzeit des Algorithmus ist nicht trivial!
  - Zwischenergebnisse lassen sich als Quotienten von Determinanten geeigneter Untermatrizen schreiben.
- Bei der Implementierung des Algorithmus wird üblicherweise Fließkommaarithmetik verwendet (d.h. *single* oder *double precision* in IEEE754 Format) $\Rightarrow$ **Rechenfehler!?**
- Wahl des Pivotelements ist entscheidend für die numerische Stabilität des Verfahrens
- Aufgrund der kubischen Laufzeit wird der Algorithmus nur für kleine und mittelgroße Matrizen (d.h. $n \leq 10000$) verwendet.
- Speicherbedarf bei $n = 10^4$: 10^8 Einträgen a 64 bit $\approx$ 1 GB
- integriert in den LA Bibliotheken **NAG**, **IMSL**, und **LAPACK**.

Beispiel zu unterschiedlichen Pivotstrategien

Gegeben sei die Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} 2.3 & 1.8 & 1 \\ 1.4 & 1.1 & -0.7 \\ 0.8 & 4.3 & 2.1 \end{pmatrix} \approx \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.609 & 1 & 0 \\ 0.348 & 845 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2.3 & 1.8 & 1 \\ 0 & 0.04 & 1.309 \\ 0 & 0 & 1108 \end{pmatrix}}_{R}$$

und das Gleichungssytem $A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} := (1.2, -2.1, 0.6)^t$ mit der "exakten" Lösung $\mathbf{x} \approx (0.3, -0.980, 2.160)$.

- Berechnung der LR Zerlegung mit dreistelliger Genauigkeit (ohne Pivotstrategie):

$$\begin{pmatrix} 2.3 & 1.8 & 1.0 \\ 1.4 & 1.1 & -0.7 \\ 0.8 & 4.3 & 2.1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2.3 & 1.8 & 1.0 \\ 0.609 & 0.0038 & -1.31 \\ 0.348 & 3.67 & 1.75 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 2.3 & 1.8 & 1.0 \\ 0.609 & 0.0038 & -1.31 \\ 0.348 & 966 & 1270 \end{pmatrix}$$

- Rückwärtseinsetzen liefert die Lösung $\tilde{\mathbf{x}} = (2.37, -3.55, 2.15)$.

Beispiel zu unterschiedlichen Pivotstrategien

- Wahl des Pivotelements 3.67 an Stelle von 0.0038 im zweiten Iterationschritt liefert die LR Zerlegung:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{P} \cdot A \approx \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.348 & 1 & 0 \\ 0.609 & 0.001 & 1 \end{pmatrix}}_{\tilde{L}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2.3 & 1.8 & 1 \\ 0 & 3.67 & 1.75 \\ 0 & 0 & -1.31 \end{pmatrix}}_{\tilde{R}},$$

  also eine gute Approximation der "exakten" LR Zerlegung:

$$P \cdot A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.349 & 1 & 0 \\ 0.609 & 0.001 & 1 \end{pmatrix}}_{\approx L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 2.3 & 1.8 & 1 \\ 0 & 3.674 & 1.752 \\ 0 & 0 & -1.311 \end{pmatrix}}_{\approx R},$$

- Rückwärtseinsetzen liefert eine gute Approximation der Lösung:

$$\tilde{\mathbf{x}} = (0.35, -0.98, 2.16).$$

Anhang: Beweis des Hauptsatzes, Teil B

- Vertausche die erste Zeile von A mit einer beliebigen Zeile i_0 für die $a_{i_0,1} \neq 0$; Den Eintrag $a_{i_0,1}$ nennt man **Pivotelement.**

$$
\begin{array}{c} Z_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Z_{i_0}} \\ \vdots \\ Z_n \end{array}
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{a_{i_0,1}} & \cdots & \cdots & a_{i_0,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}
\end{pmatrix}
\xrightarrow{Z_1 \leftrightarrow Z_{i_0}}
\begin{array}{c} Z_{i_0} \\ \vdots \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{array}
\underbrace{\begin{pmatrix}
\mathbf{a_{i_0,1}} & a_{i_0,2} & \cdots & a_{i_0,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}
\end{pmatrix}}_{A' = (a'_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}},
$$

- Die Zeilenvertauschung der i-ten und j-ten Zeile ist als Matrix-multiplikation $P[i,j] \cdot A$ darstellbar (d.h. $A' = P[1, i_0] \cdot A$), wobei

$$
P[i,j] := \begin{pmatrix}
1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1
\end{pmatrix}
\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ \mathbf{i} \\ \vdots \\ \mathbf{j} \\ \vdots \\ n \end{array}
$$

Beweis des Hauptsatzes, Teil B

- Für alle $i \neq 1$, subtrahiere das $l_{i,1}$-fache der ersten Zeile von A' von der i-ten Zeile von A', wobei $l_{i,1} := \frac{a'_{1,i}}{a'_{1,1}}$:

$$\begin{array}{c} Z'_1 \\ Z'_2 \\ \vdots \\ Z'_n \end{array} \begin{pmatrix} a'_{1,1} & a'_{1,2} & \cdots & a'_{1,n} \\ a'_{2,1} & a'_{2,2} & \cdots & a'_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a'_{n,1} & a'_{n,2} & \cdots & a'_{n,n} \end{pmatrix} \xrightarrow{Z''_i = Z'_i - l_{i,1} \cdot Z'_1} \begin{array}{c} Z''_1 \\ Z''_2 \\ \vdots \\ Z''_n \end{array} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i_0,1} & a_{i_0,2} & \cdots & a_{i_0,n} \\ 0 & a''_{2,2} & \cdots & a''_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a''_{n,2} & \cdots & a''_{n,n} \end{pmatrix}}_{A'' = (a''_{i,j})_{i,j=1,\ldots,n}},$$

- Wie im Beweis zu Teil A stellen wir die Zeilenoperationen als Matrixmultiplikation dar, d.h.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -l_{n,1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{L_1} \cdot A' = A'',$$

und somit $L_1 \cdot P[1, i_0] \cdot A = A''$.

Beweis des Hauptsatzes, Teil B

Nach Induktionsannahme gibt es eine $(n-1) \times (n-1)$-Permutationsmatrix $P'' = (p''_{i,j})'_{i,j=1,\dots,n-1}$ und Dreiecksmatrizen $L'' = (l''_{i,j})'_{i,j=1,\dots,n-1}$ und $R'' = (r''_{i,j})'_{i,j=1,\dots,n-1}$ mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{p}''_{1,1} & \cdots & \mathbf{p}''_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathbf{p}''_{n-1,1} & \cdots & \mathbf{p}''_{n-1,n-1} \end{pmatrix}}_{P*} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i_0,1} & a_{i_0,2} & \cdots & a_{i_0,n} \\ 0 & a''_{2,2} & \cdots & a''_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a''_{n,2} & \cdots & a''_{n,n} \end{pmatrix}}_{A''} =$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l''_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & l''_{n-1,1} & \cdots & l''_{n-1,n-1} \end{pmatrix}}_{L*} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i_0,1} & a_{i_0,2} & \cdots & a_{i_0,n} \\ 0 & r''_{1,1} & \cdots & r''_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r''_{n-1,n-1} \end{pmatrix}}_{R*},$$

und somit $P^* \cdot L_1 \cdot P[1, i_0] \cdot A = L^* \cdot R^*$.

Leider kommutieren P^* und L_1 nicht, aber ...

Beweis des Hauptsatzes, Teil B

Nach Induktionsannahme gibt es eine $(n-1) \times (n-1)$-Permutationsmatrix $P'' = (p''_{i,j})'_{i,j=1,\ldots,n-1}$ und Dreiecksmatrizen $L'' = (l''_{i,j})'_{i,j=1,\ldots,n-1}$ und $R'' = (r''_{i,j})'_{i,j=1,\ldots,n-1}$ mit

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathbf{p''_{1,1}} & \cdots & \mathbf{p''_{1,n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \mathbf{p''_{n-1,1}} & \cdots & \mathbf{p''_{n-1,n-1}} \end{pmatrix}}_{P*} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i_0,1} & a_{i_0,2} & \cdots & a_{i_0,n} \\ 0 & a''_{2,2} & \cdots & a''_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a''_{n,2} & \cdots & a''_{n,n} \end{pmatrix}}_{A''} =$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & l''_{1,1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & l''_{n-1,1} & \cdots & l''_{n-1,n-1} \end{pmatrix}}_{L*} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{i_0,1} & a_{i_0,2} & \cdots & a_{i_0,n} \\ 0 & r''_{1,1} & \cdots & r''_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r''_{n-1,n-1} \end{pmatrix}}_{R*},$$

und somit $P^* \cdot L_1 \cdot P[1, i_0] \cdot A = L^* \cdot R^*$.

Leider kommutieren P^* und L_1 nicht, aber ...

Beweis des Hauptsatzes, Teil B

- mit $(1, l_2^*, \ldots, l_n^*)^t := P^* \cdot (1, l_{2,1}, \ldots, l_{n,1})^t$ gilt:

$$P^* \cdot L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p''_{1,1} & \cdots & p''_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p''_{n-1,1} & \cdots & p''_{n-1,n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_{2,1} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -l_{n,1} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_2^* & p''_{1,1} & \cdots & p''_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -l_n^* & p''_{n-1,1} & \cdots & p''_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -l_2^* & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -l_n^* & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{L_1^*} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & p''_{1,1} & \cdots & p''_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & p''_{n-1,1} & \cdots & p''_{n-1,n-1} \end{pmatrix},$$

- und somit $L_1^* \cdot \underbrace{P^* \cdot P[1, i_0]}_{=:P} \cdot A = L^* \cdot R^* \Leftrightarrow P \cdot A = \underbrace{(L_1^*)^{-1} \cdot L^*}_{=:L} \cdot R.$