TD 03 – Tommy, il n'y a pas de Robert

Exercice 1. *Kapla et Lego*

1. Montrer que les fonctions $n \mapsto 1^n$ et $1^n \mapsto n$ sont calculables en temps $\mathcal{O}(n)$.
2. Montrer que les fonctions suivantes sont constructibles en temps : $n \mapsto n$, $n \mapsto n^2$, $n \mapsto 2^n$.
3. Soit f et g constructibles en temps. Montrer que $f+g$, $f \times g$ et $f \circ g$ le sont aussi.

Remarque. Il existe une fonction récursive $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\mathsf{TIME}(f(n)) = \mathsf{TIME}\left(2^{f(n)}\right)$. (Une preuve se trouve dans *Computational Complexity* de C.H.Papadimitriou).

Exercice 2. *Théorème de Ladner*

Définition. Pour toute fonction $F : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on définit

$$\text{SAT}_F = \left\{ \psi 01^{n^{F(n)}} \mid \psi \in \text{SAT et } n = |\psi| \right\}$$

Définition. On définit la fonction H ainsi : $H(0) = H(1) = 1$ et pour $n \geq 2$, $H(n)$ est le plus petit $i < \log\log n$ tel que pour tout $x \in \{0,1\}*$ avec $|x| < \log n$, la machine M_i calcule $\text{SAT}_H(x)$ sur l'entrée x en au plus $i|x|^i$ étapes. Si un tel i n'existe pas, on pose $H(n) = \lceil \log\log n \rceil$.

1. Montrer que la fonction H est bien définie.
2. Montrer que si $\text{SAT}_H \in \mathsf{P}$ alors $H(n) = O(1)$.
3. Montrer que si $\text{SAT}_H \notin \mathsf{P}$ alors $H(n) \underset{n\to\infty}{\to} \infty$.
4. Montrer que la fonction H est calculable en temps polynômial en n.

On suppose pour les deux prochaines questions que $\mathsf{P} \neq \mathsf{NP}$.

5. Montrer que $\text{SAT}_H \notin P$.
6. Montrer que SAT_H n'est pas NP-complet.
7. Conclure