TD 06 – Spatiologie

Exercice 1. *Langage* L

1. Montrer que les fonctions $n \mapsto \lfloor \log n \rfloor$ et $n \mapsto n^k$ ($k \geq 1$) sont constructibles en espace, et que si f est constructible en espace, alors 2^f également.
2. Montrer que les langages $\textsc{Pair} = \{x : x \text{ contient un nombre pair de } 1\}$ et $\textsc{Mult} = \{\langle \overline{n}, \overline{m}, \overline{n \cdot m} \rangle : n, m \in \mathbb{N}\}$ sont dans L.
3. Montrer que 3-$\textsc{Sat} \in$ PSPACE, et plus généralement que NP $\subseteq$ PSPACE.

Exercice 2. *Théorème de hiérarchie en espace déterministe*

1. Montrer qu'il existe une machine de Turing déterministe $\mathcal{U}$ qui sur l'entrée $\langle \alpha, x \rangle$ telle que M_α fonctionne en espace $s(n)$ simule $M_\alpha(x)$ en utilisant un espace $c \cdot s(|x|)$ (où c ne dépend pas de $|x|$).
2. Montrer le théorème suivant, dû à Stearns, Hartmanis et Lewis (1965) :

   Théorème. *Soit s_1 et s_2 deux fonctions constructibles en espace telles que $s_1(n) = o(s_2(n))$. Alors* $\mathsf{DSPACE}(s_1(n)) \subsetneq \mathsf{DSPACE}(s_2(n))$.

Exercice 3.

1. Soit $c > 0$. Montrer que $\mathsf{DSPACE}(n^c) \subseteq \mathsf{NP}$ implique $\mathsf{NP} = \mathsf{PSPACE}$.
2. En déduire que pour tout $c > 0$, $\mathsf{DSPACE}(n^c) \neq \mathsf{NP}$.
3. De la même manière, montrer que $\mathsf{DTIME}(2^{cn}) \neq \mathsf{NP}$ pour tout $c > 0$.

Exercice 4. *Théorème de Savitch*

1. Montrer que $\textsc{Reachability} \in \mathsf{DSPACE}\left(\log^2(n)\right)$
2. En déduire le théorème de Savitch :

   Théorème. *Pour toute fonction S constructible en espace telle que $S(n) \geq \log n$,*

$$\mathsf{NSPACE}\left(S(n)\right) \subseteq \mathsf{DSPACE}\left(S(n)^2\right)$$