# TD 07 – De la Terre à la Lune

**Exercice 1.** *Théorème de Savitch*

REACHABILITY $= \{\langle G, u, v\rangle$ : il existe un chemin dans le graphe $G$ allant de $u$ à $v\}$.

1. Montrer que REACHABILITY $\in \mathsf{DSPACE}\left(\log^2(n)\right)$
2. En déduire le théorème de Savitch :
   **Théorème.** *Pour toute fonction $S$ constructible en espace telle que $S(n) \geq \log n$,*
   $$\mathsf{NSPACE}\,(S(n)) \subseteq \mathsf{DSPACE}\,(S(n)^2)$$

**Exercice 2.** *Le jeu où l'on trouve tout*

On introduit le jeu GEOGRAPHY. Il s'agit d'un jeu à 2 joueurs qui se joue sur un graphe orienté. Un sommet est préalablement colorié. Les joueurs jouent chacun à leur tour. À son tour de jeu, le joueur choisit un sommet $w$ non encore colorié tel qu'il y ait une arête allant du dernier sommet colorié vers $w$, puis colorie ce sommet. Le premier joueur qui ne peut plus jouer a perdu. On modélise ce jeu par le langage suivant :

$$\text{GEOGRAPHY} = \{\langle G, C, u\rangle : G = (S, A) \text{ graphe orienté, } C \subseteq S \text{ sommets déjà coloriés}$$
$$\text{et } u \in C \text{ dernier sommet colorié. Le triplet correspond à une position gagnante.}\}$$

1. Montrer que GEOGRAPHY est dans PSPACE.
2. Montrer que GEOGRAPHY est PSPACE-complet.

**Exercice 3.** *Réductions en espace logarithmique*

**Définition.** Une fonction $f : \{0,1\}^\star \to \{0,1\}^\star$ est dite *calculable implicitement en espace logarithmique* (*ciel*) si $f$ est polynomialement bornée ($\exists c \forall x, |f(x)| \leq |x|^c$) et si $L_f := \{\langle x, i\rangle : f(x)_i = 1\}$ et $L'_f := \{\langle x, i\rangle : i \leq |f(x)|\}$ sont dans $\mathsf{L}$.

On définit les réductions suivantes :
– *many-one* ou *Karp* : $A \leq_m^p B \iff \exists f \in \mathsf{FP}, (x \in A \iff f(x) \in B)$
– *en espace logarithmique* : $A \leq_l B \iff \exists f$ ciel , $(x \in A \iff f(x) \in B)$

**Définition.** Une fonction $f : \{0,1\}^\star \to \{0,1\}^\star$ est dite *calculable en espace logarithmique avec écriture seule, toujours en-avant* (*céleste*) si $f$ peut être calculée par une machine de Turing (avec 1 ruban d'entrée en lecture seule, 1 ruban de sorties et des rubans de travail) fonctionnant en espace $\mathcal{O}(\log n)$ (espace utilisé sur les rubans de travail) et dont le ruban de sortie est à « écriture unique », c'est-à-dire qu'à chaque étape, la tête de lecture du ruban de sortie peut soit rester immobile, soit écrire un symbole et se déplacer vers la droite.

1. Montrer qu'une fonction est de type *ciel* si et seulement si elle est *céleste*.
2. Montrer que si $f$ et $g$ sont deux fonctions *ciel*, alors $f \circ g$ également.
3. Comparer les réductions $\leq_l$ et $\leq_m^p$.
4. Montrer que $\leq_l$ est transitive, et que $\mathsf{L}$ est close pour $\leq_l$.
5. Montrer que SAT et 3-SAT sont NP-complets pour la réduction $\leq_l$.

La suite du TD se trouve au verso.

**Exercice 4.** *« Plus petits les espaces… »*

Pour $k \geq 0$, soit $w_k$ la concaténation dans l'ordre lexicographique de toutes les chaînes de longueur $k$, séparées par des signes $\sharp$ (*i.e.* $w_k = 0^{k-2}00\sharp 0^{k-2}01\sharp 0^{k-2}10\sharp \ldots \sharp 1^k$). Soit $W = \{w_k : k \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que $W$ n'est pas un langage régulier et donc que $W \notin \mathsf{DSPACE}(1)$.
2. Montrer que $W \in \mathsf{DSPACE}(\log\log n)$.
3. (Difficile) Montrer que si $M$ est une machine fonctionnant en espace $\ell(n)$ tel que $\ell(n)$ est non bornée, alors $\ell(n) \geq \log\log n$ infiniment souvent. Pour cela, on pourra considérer pour tout $m$, la plus petite chaîne $x_m$ telle que sur l'entrée $x_m$, $M$ utilise un espace au moins $m$, puis compter le nombre de configurations possibles pour chaque position du pointeur sur le ruban d'entrée.
4. En déduire que pour tout $s(n) = o(\log\log(n))$, $\mathsf{DSPACE}(s(n)) = \mathsf{DSPACE}(1)$.