TD 08 – Autour du jeu

Exercice 1. *Les rives*

1. Montrer que pour toute fonction constructible en espace $S(n) > \log n$, on a $\mathsf{NSPACE}(S(n)) = \mathsf{coNSPACE}(S(n))$.
2. Redonner la définition de NL par certificats.
3. Montrer que si l'on remplace dans la définition précédente la condition que le certificat est « read-once » par la condition que le certificat est « read-only », alors on obtient la classe NP.

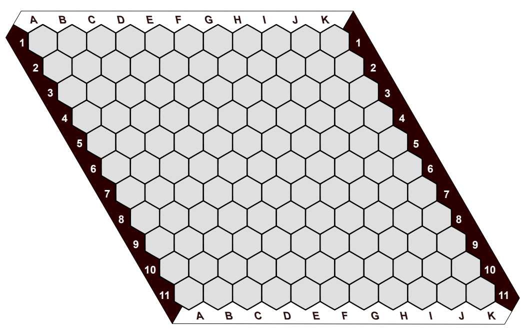
Exercice 2. *Les bas-côtés*

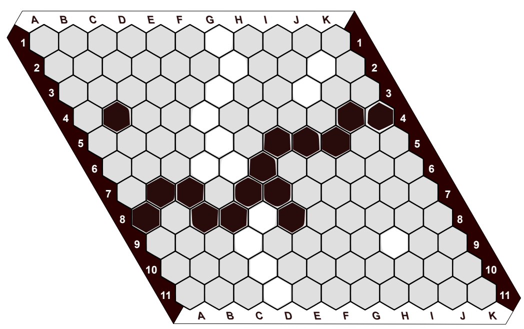
Dans le cours, on a vu que PATH (aussi appelé ST-CONN) est NL-complet. On peut montrer que ST-UCONN, (ie. trouver si deux sommets s et t sont connectés dans un graphe non-orienté) est dans L (résultat difficile : on peut trouver une preuve dans « *Computational Complexity* » de Oded Goldreich).

1. Montrer que le problème suivant est NL-complet : Donnés un graphe non-orienté G, deux sommets s et t et un entier K, déterminer s'il existe un chemin reliant s à t de longueur au plus K dans G.
2. Montrer que le problème suivant est NL-complet : Donnés un graphe non-orienté G, deux sommets s et t et un entier K, déterminer s'il existe un chemin reliant s à t de longueur exactement K dans G.

Extrait du jeu de Hex

Au début de partie, un plateau vide, illustré sur la figure ci-dessous à gauche, sépare deux joueurs. Ce tablier représente un losange formé par des hexagones réguliers. Chaque joueur est représenté par une couleur, noir ou blanc.
Les joueurs possèdent des pions à leur couleur qu'ils disposent tour à tour sur une case de leur choix et un par un (le joueur Noir commence à jouer). Le plateau se remplit ainsi progressivement. L'objectif d'un joueur, par exemple Noir, est de relier les deux côtés opposés du losange symbolisés par la couleur noire. Si la configuration des pions noirs permet la création d'une ligne continue (figure de droite) reliant un côté noir à l'autre, Noir a gagné et le jeu s'arrête.





Exercice 3. *Hex-ercice*

Nous nous intéresserons à la complexité du jeu en fonction de la taille du plateau. La grille est constituée de $n \times n$ points. Une partie dure au plus n^2 coups.
HEX est l'ensemble des configurations telles que le joueur au trait a une stratégie gagnante. On considérera une variante de ce jeu GRAPH-HEX. GRAPH-HEX se joue comme HEX sauf que le plateau est un graphe planaire non-orienté avec deux sommets distincts s et t. Les joueurs colorent alternativement un sommet non colorié (et donc gris !) différent de s et de t. Le joueur Blanc gagne s'il crée un chemin blanc de s à t, sinon Noir gagne.

1. Montrer que HEX est dans PSPACE.

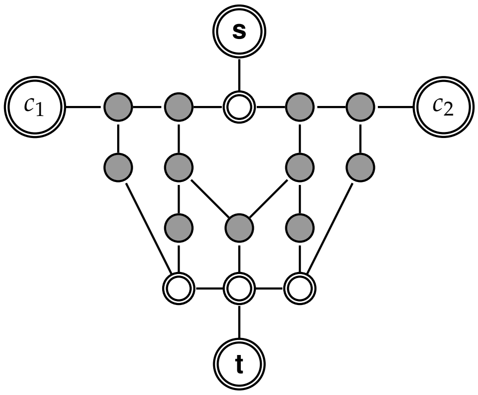
Nous allons maintenant montrer que HEX est PSPACE-difficile, par réduction depuis GEOGRAPHY.

2. Pourquoi peut-on se restreindre dans GEOGRAPHY aux cas où le graphe est obtenu par réduction de TQBF ?

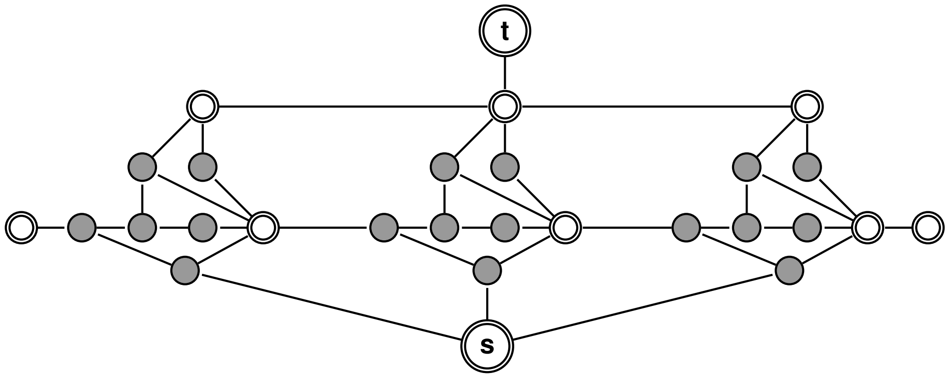
3. Montrer que l'on peut se restreindre au cas où les graphes obtenus ont chacun de leur sommet de degré au plus 3 et sont planaires.

4. Donner alors les différents types de sommets qui peuvent être présents dans le graphe.

5. Trouver un « pattern » pour simuler chacun de ces cas. Par exemple, un de ces cas (le choix pour joueur Blanc) pourra être simulé par :



6. Montrer que GEOGRAPHY se réduit à HEX. Essayer de tout recoller sans se préoccuper dans un premier temps de la planarité des chemins reliant un « pattern » à t. Puis s'occuper de ces chemins grâce au pattern :



7. Montrer que GEOGRAPHY se réduit à HEX.