TD 09 – Alternance

Exercice 1. *À cours d'égalités*

✎ On définit $\mathsf{AP} = \bigcup_c \mathsf{ATIME}(n^c)$. Montrer qu'$\mathsf{AP} = \mathsf{PSPACE}$.

Exercice 2. *Dangereusement Polynomial*

Définition. $\mathsf{DP} = \{L_{\mathsf{NP}} \cap L_{\mathsf{coNP}} : L_{\mathsf{NP}} \in \mathsf{NP} \text{ et } L_{\mathsf{coNP}} \in \mathsf{coNP}\}$.

1. Comparer DP et $\mathsf{NP} \cap \mathsf{coNP}$.

Soit ExactIndSet $= \{\langle G, k\rangle$: la taille du plus grand stable [1] de G est exactement $k\}$.

2. Montrer que ExactIndSet $\in \Sigma_2^{\mathsf{P}} \cap \Pi_2^{\mathsf{P}}$.
3. Montrer que ExactIndSet $\in$ DP.
4. Montrer que tout langage de DP se réduit polynomialement à ExactIndSet.

Exercice 3. *ΣΠΔ*

On définit $\Delta_{i+1}^{\mathsf{P}} = \mathsf{P}^{\Sigma_i^{\mathsf{P}}} = \mathsf{P}^{\Pi_i^{\mathsf{P}}}$.

1. Montrer que les deux définitions données sont bien équivalentes.
2. Montrer que $\Sigma_i^{\mathsf{P}} \cup \Pi_i^{\mathsf{P}} \subseteq \Delta_{i+1}^{\mathsf{P}} \subseteq \Sigma^{\mathsf{P}}{}_{i+1} \cup \Pi^{\mathsf{P}}{}_{i+1}$.
3. Montrer que $\Sigma_i^{\mathsf{P}} \cup \Pi_i^{\mathsf{P}} = \Delta_i^{\mathsf{P}}$ implique l'effondrement de la hiérarchie polynomiale.
4. Montrer que Δ_i^{P} est clos par réduction polynomiale, par réduction polynomiale à la Cook-Turing et par complémentation.
5. Montrer que $\{\phi(x_1, \ldots, x_n) : \exists!(a_1, \ldots, a_n), \phi(a_1, \ldots, a_n) = 1\}$ est dans Δ_2^{P}.

1. Un stable dans un graphe est un ensemble de sommets n'ayant aucune arête entre eux.

Exercice 4. *Six recuits*

Pour chaque question, donner la taille et la profondeur du circuit obtenu.

1. Donner un circuit calculant le XOR de deux entrées booléennes.
2. Réaliser un circuit qui effectue l'opération $\text{SEL}(x, y, z)$ définie sur 3 bits par $\text{SEL}(0, y, z) = y$ et $\text{SEL}(1, y, z) = z$.
3. Soit $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}^m$. On étend la définition de circuit en autorisant plusieurs sorties (de manière équivalente, on peut supposer qu'on a m circuits, un pour chaque bit de sortie). Montrer comment transformer un circuit calculant f en un circuit (à une seule sortie) décidant le langage $\{(x, y) : y = f(x)\}$.
4. Donner un circuit (à plusieurs sorties) effectuant l'addition de deux entiers binaires $x = \overline{x_{n-1} \cdots x_0}$ et $y = \overline{y_{n-1} \cdots y_0}$ en utilisant l'agorithme naïf appris à l'école.
5. On suppose que n est une puissance de 2. Réaliser un circuit effectuant l'addition de x et y en utilisant la méthode récursive suivante : on calcule en parallèle $\overline{x_{n-1} \cdots x_{n/2}} + \overline{y_{n-1} \cdots y_{n/2}}$ et $\overline{x_{n-1} \cdots x_{n/2}} + \overline{y_{n-1} \cdots y_{n/2}} + 1$ puis on sélectionne le bon en fonction de la retenue sortante du calcul de $\overline{x_{n/2-1} \cdots x_0} + \overline{y_{n/2-1} \cdots y_0}$.
6. Quelle taille et quelle profondeur de circuit obtient-on pour le graphe de l'addition ? Proposer une méthode différente pour le graphe de l'addition.