L3 - FDI 2011
Sébastien Tavenas et Natacha Portier

TD2 : Automates farcis

Exercice 1 : Construire quelques automates

Donner des automates finis qui reconnaissent les langages suivants

- $L_1 = \{a^{32n} | n \in \mathbb{N}\}$.
- L_2 = ensemble des mots qui ne possèdent pas trois a consécutifs et qui ont un nombre pair de b.
- $L_3 = \{a^i |$ Le chiffre 7 apparaît i fois consécutives dans le développement de π en base 10$\}$

Exercice 2 : Des récalcitrants

Soit L un langage rationnel sur un alphabet Σ. Montrer que les langages suivants sont rationnels.

1 - $\mathrm{CYCLE}(L) = \{x_1x_2, x_1, x_2 \in \Sigma^*$ et $x_2x_1 \in L\}$
2 - $\mathrm{MAX}(L) = \{x \in L, \forall y \neq \epsilon, xy \notin L\}$
3 - $\mathrm{MIN}(L) = \{x \in L,$ aucun préfixe propre de x n'est dans $L\}$
4 - $\mathrm{INIT}(L) = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^*, xy \in L\}$
5 - $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^*$ avec $xy \in L$ et $|y| = |x|\}$
6 - $\mathrm{SQRT}(L) = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^*$ avec $xy \in L$ et $|y| = |x|^2\}$
7 - $\mathrm{LOG}(L) = \{x \in \Sigma^*, \exists y \in \Sigma^*$ avec $xy \in L$ et $|y| = 2^{|x|}\}$
8 - $L' = \{a_2a_1a_4a_3 \dots a_{2n}a_{2n+1} | a_1a_2 \dots a_{2n} \in L,\ a_i \in \Sigma\}$
9 - $L' = \{a_1a_3 \dots a_{2n-1} | a_1a_2 \dots a_{2n} \in L,\ a_i \in \Sigma\}$
10 - $K^{-1}L$ où K est un langage quelconque sur le même alphabet

Exercice 3 : Lex L. (contre Superman)

Soit L un langage rationnel sur un alphabet fini Σ. On munit Σ d'un ordre total et on considère l'ordre lexicographique L_{lex} sur Σ^*. On définit le langage $L_{lex} = \{w \in L \mid \forall x \in L, |x| = |w| \Rightarrow w \leq_{lex} x\}$ c'est-à-dire que pour chaque longueur de mots dans L, on ne garde que le plus petit pour l'ordre lexicographique.
Montrer que L_{lex} est rationnel.

Exercice 4 : Stabilité par morphismes

Soit Σ un alphabet fini. Un morphisme $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ est une application vérifiant, pour tous mots u, v, $h(uv) = h(u)h(v)$. Ainsi, un morphisme est défini dès qu'on se donne les images des mots à une lettre. Si L est un langage sur l'alphabet Σ et h un morphisme, on note $h(L)$ l'ensemble $\{h(u) | u \in L\}$.
1.Décrire $h(L)$ dans les cas suivants, où l'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$.

- $h(a) = ab$, $h(b) = \epsilon$, $L = \{a^nb^n | n \in \mathbb{N}\}$.
- $h(a) = ab$, $h(b) = abab$, L est défini par l'expression rationnelle b^*ab^*.

2. Soit L un langage et h un morphisme. Montrer que L rationnel implique $h(L)$ rationnel. On pourra raisonner par induction sur une expression rationnelle.
3. Qu'en est-il de la réciproque de la question 2 ?

Pour un langage L et un morphisme h sur l'alphabet Σ, on note $h^{-1}(L)$ l'ensemble $\{v \in \Sigma^* | h(v) \in L\}$.

4. Donner une expression de $h^{-1}(L)$ dans les cas suivants.
   - $\Sigma = \{a, b\}$, $h(a) = a$, $h(b) = ab$, $L = \{a^i b^j | i \geq j\}$.
   - $\Sigma = \{a, b, c\}$, $h(a) = a$, $h(b) = ab$, $h(c) = ba$, L défini par $a(ba)^*$.
5. Soit L un langage et h un morphisme. Montrer que L rationnel implique $h^{-1}(L)$ rationnel.
6. Qu'en est-il de la réciproque de la question ?

Exercice 5 : L^2

Soit $L \subseteq \{a, b\}^*$ un langage.

1. A-t-on nécessairement (L rationnel $\Rightarrow L^2$ rationnel) ?
2. A-t-on nécessairement (L^2 rationnel $\Rightarrow L$ rationnel) ?
3. Que deviennent ces implication pour un langage à une lettre ?