TD03 - Salade d'automates

Exercice 1.
Donner des automates finis reconnaissant les langages définis par les expressions rationnelles suivantes.

1. a^*b^*

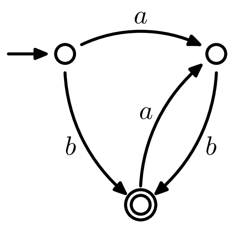
2. $(a \cup b)aab(a \cup b)^*$

3. $(b \cup \varepsilon)((a \cup ab)^* \cup (bb)^*)^*$

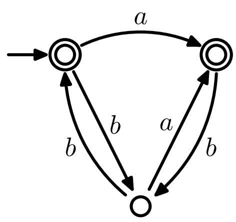
4. $b\big((aab \cup b)^* a(aa)^*\big)^* b^*$

Exercice 2.
Donner des expressions rationnelles définissant les langages reconnus par les automates suivants.

1.



2.



Exercice 3. *Rationnel ?*

✎ Parmi les langages suivants lesquels sont rationnels ? Justifiez vos réponses :

1. $\{a^{2n},\ n \geq 0\}$.
2. $\{a^m b^n a^{m+n},\ m \geq 0 \text{ et } n \geq 0\}$.
3. $\{a^p,\ p \text{ premier}\}$.
4. L'ensemble des mots qui n'ont pas trois a consécutifs.
5. L'ensemble des mots qui ont un nombre égal de a et de b.
6. L'ensemble des mots qui sont des palindromes sur $\Sigma = \{a, b\}$.
7. $\{u\overline{u}v \mid u, v \in \{a,b\}^+\}$ où $\overline{u}$ est le miroir de u, $\overline{abb} = bba$.
8. $\{uv\overline{u} \mid u, v \in \{a,b\}^+\}$.
9. $\{a^i b^j, \mathrm{pgcd}(i,j) = 1\}$.
10. $\{a^i b^j, i \geq j\}$.

Exercice 4. *Stabilité par morphismes*

Soit Σ un alphabet fini. Un morphisme $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ est une application vérifiant, pour tous mots u, v, $h(uv) = h(u)h(v)$. Ainsi, un morphisme est défini dès qu'on se donne les images des mots à une lettre. Si L est un langage sur l'alphabet Σ et h un morphisme, on note $h(L)$ l'ensemble $\{h(u) | u \in L\}$.

1. Décrire $h(L)$ dans les cas suivants, où l'alphabet est $\Sigma = \{a, b\}$.
– $h(a) = ab$, $h(b) = \varepsilon$, $L = \{a^n b^n | n \in \mathbb{N}\}$.
– $h(a) = ab$, $h(b) = abab$, L est défini par l'expression rationnelle $b^* ab^*$.

2. Soit L un langage et h un morphisme. Montrer que L rationnel implique $h(L)$ rationnel. On pourra raisonner par induction sur une expression rationnelle.

3. Qu'en est-il de la réciproque de la question 2 ?

Pour un langage L et un morphisme h sur l'alphabet Σ, on note $h^{-1}(L)$ l'ensemble $\{v \in \Sigma^* | h(v) \in L\}$.

4. Donner une expression de $h^{-1}(L)$ dans les cas suivants.
– $\Sigma = \{a, b\}$, $h(a) = a$, $h(b) = ab$, $L = \{a^i b^j | i \geq j\}$.
– $\Sigma = \{a, b, c\}$, $h(a) = a$, $h(b) = ab$, $h(c) = ba$, L défini par $a(ba)^*$.

5. Soit L un langage et h un morphisme. Montrer que L rationnel implique $h^{-1}(L)$ rationnel.

6. Qu'en est-il de la réciproque de la question ?

Exercice 5. L^2

Soit $L \subseteq \{a, b\}^*$ un langage.

1. A-t-on nécessairement (L rationnel $\Rightarrow L^2$ rationnel) ?

2. A-t-on nécessairement (L^2 rationnel $\Rightarrow L$ rationnel) ?

3. Que deviennent ces implication pour un langage à une lettre ?