TD06 – La Grand-mère de Sheila

Exercice 1. *Arrière ! Grammaires*

✎ Donner des grammaires algébriques engendrant les langages suivants.

1. L'ensemble des palindromes sur $\{a, b\}$ et son complémentaire.
2. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ de longueur impaire.
3. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ ayant le même nombre d'occurrences de a que de b.
4. L'ensemble des mots sur $\{a, b\}$ ayant deux fois plus de a que de b.
5. $\{w\#\overline{w}\#,\ w \in (a + b)^*\}$.
6. $\{w\#w'|w, w' \in (a + b)^*$ et $w \neq w'\}$.
7. L'ensemble des mots de $(a + b)^*$ qui ne sont pas de la forme ww.

Exercice 2. *Forme normale de Greibach*

Définitions : Une grammaire $G = (T, N, R)$ (T terminaux, N non-terminaux, R règles) est en forme normale de Greibach si chacune de ses règles est de la forme $S \to w$ où $w \in TN^*$.
Une grammaire sera dite propre si elle ne contient aucune règle de la forme $S \to \varepsilon$ ou de la forme $S \to S'$ pour $S, S' \in N$.

Le but de cet exercice est de montrer la proposition suivante :
Proposition : Toute grammaire propre est équivalente à une grammaire en forme normale de Greibach.

Soit $G = (T, N, R)$ une grammaire où on suppose que $N = \{X_1, \ldots, X_n\}$. On pose $G_0 = G$ et on définit par récurrence une suite $G_0, \ldots, G_n$ de grammaires telles que dans chaque grammaire G_i les variables $X_1, \ldots, X_i$ n'apparaissent pas en tête des membres droits de règles. On suppose avoir construit la grammaire G_{i-1}, construisons la grammaire G_i par récurrence :

1. Montrer que si l'on remplace toutes les règles de la forme (i fixé dans l'induction)

$$X_i \to X_i u_1 + \ldots + X_i u_k + w_1 + \ldots + w_p$$

par des règles de la forme

$$X_i \to w_1 X_i' + \ldots + w_p X_i' + w_1 + \ldots + w_p$$

$$X_i' \to u_1 X_i' + \ldots + u_k X_i' + u_1 + \ldots + u_k$$

on obtient une grammaire équivalente.

2. Montrer comment transformer cette nouvelle grammaire pour que X_i n'apparaisse dans aucune règle comme début du membre droit.

3. Que reste-t-il à modifier pour que la grammaire que l'on obtienne soit bien G_i, ie n'ait pas de règles dont le membre droit commence par un des non-terminaux $\{X_1, \ldots, X_i\}$?

On a ainsi transformé G par induction en une grammaire équivalente G_n.

4. Conclure en prouvant la proposition.

5. Appliquer l'algorithme à la grammaire suivante :

$$\begin{aligned} A &\to AB + a \\ B &\to BC + b \\ C &\to CA + c \end{aligned}$$

Exercice 3. *Intersection avec un rationnel*

Montrer que l'intersection d'un langage algébrique et d'un langage rationnel est algébrique.