L3 - FDI 2011
Sébastien Tavenas et Natacha Portier

**TD9**

**Exercice 1**[Outil mathématique]
1- Donner une bijection $b$ de $N^2 \to N$.

2- Donner un ordre de grandeur de $b(x, y)$.

3- Donner une bijection de $N^3$ dans $N$, de $N^4$ dans $N$...

4- Donner une bijection $\xi$ de $N^\omega$ (l'ensemble des suites finies d'entiers) dans $N$.

5- Donner une expression de $b$ à l'aide de fonctions mathématiques usuelles.
On note usuellement $\langle x, y\rangle$ pour $b(b, y)$.

**Exercice 2** [Echauffement]
Construisez les machines de Turing suivantes :

1- $M$ qui écrit 0 1 0 1 0 1 0 ... sur un ruban blanc. *Pour ceux qui douteraient de l'intérêt de cette question, s'adresser à A. Turing.*

2- $M$ à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui multiplie par 2 son entrée binaire.

3- $M$ à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui multiplie par 2 et ajoute 1 à son entrée binaire.

4- $M$ à un ruban sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui ajoute 1 à son entrée binaire.

5- $M$ à deux rubans sur l'alphabet $\{0, 1, \_\}$ qui code en binaire son entrée unaire.

**Exercice 3**[Reconnaissance de Langages]
Soit $\Sigma = \{0, 1\}$ un alphabet et soit $x$ un mot de $\Sigma^*$. Construire des machines de Turing telles que :

1- lisant $x$ la machine écrit $x^{-1}$ ($x$ écrit à l'envers)

2- la machine accepte $x$ ssi $x$ s'écrit $yy^{-1}$ pour un certain $y \in \Sigma^*$.

3- la machine accepte $x$ ssi $x$ s'écrit $yy$ pour un certain $y \in \Sigma^*$.

**Exercice 4**[Calcul de fonctions] Construire une machine de Turing qui effectue :

1- L'addition de deux entiers.

2- La multiplication de deux entiers.

3- La composition de deux fonctions, étant données les machines calculant chacune des fonctions.

*La bijection de $N^2$ dans $N$ de l'exercice 1 est donc calculable par machine de turing...*

**Exercice 5**[Machines avec délimiteurs]

On considère les machines de Turing à un ruban dont l'alphabet $\Sigma$ ($|\Sigma| \geq 3$) possède un symbole particulier $\#$. La configuration d'entrée est de la forme $\ldots BB\#\omega\#BB\ldots$ où $\omega$ ne contient pas de $\#$. Toutes les configurations sont de ce type, à ceci près qu'on s'autorise un $\#\#$ s'il disparaît dans la configuration suivante.

Cette machine calcule $f$ si pour tout $\omega$ elle s'arrête sur $\#f(\omega)\#$.

Ces machines sont-elles équivalentes aux autres machines de Turing ?

**Exercice 6**[Mimes]

Soit $\Sigma$ un alphabet fini, $|\Sigma| \geq 2$. On dira qu'on simule une machine de Turing d'alphabet $\Sigma$ calculant la fonction $f$ par une machine de Turing d'alphabet $\Sigma'$ calculant la fonction $g$ s'il existe un entier $k$ et une fonction injective $\phi : \Sigma \to {\Sigma'}^k$ telle que pour toute entrée $x$ de la première, on ait $g(\phi^\star(x)) = \phi^\star(f(x))$ où $\phi^\star$ est l'extension naturelle de $\phi$ à $\Sigma^\star$.

1- Simuler une machine de Turing à un ruban d'alphabet $\Sigma$ par une machine de Turing d'alphabet $\{0, 1, B\}$.

2- Montrer que toute machine de Turing à $k$ rubans peut être simulée par une machine à un ruban.

**Exercice 7**[du temps et de l'espace]

Supposons qu'une machine de Turing s'arrête au bout de $t$ étapes de calcul en consommant $s$ cases mémoires. Quelle(s) relation(s) existent entre $t$ et $s$ ?

**Exercice 8**[Economisons l'espace et le temps]

Soit $M$ une machine de Turing à un ruban. On supposera que pour tout mot en entrée de $M$ ce mot est entièrement lu par $M$ au cours du calcul.

1- Montrez que pour tout entier $c \geq 1$ il existe une constante $a$ et une machine de Turing $M'$ à deux rubans qui accepte les mêmes entrées que $M$ et telle que si $M$ consomme $s(|x|)$ cases mémoires sur l'entrée $x$ alors $M'$ consomme au plus $a + |x| + s(|x|)/c$ cases mémoires sur la même entrée.

2- Montrez que pour tout entier $c \geq 1$ il existe une constante $a$ et une machine de Turing $M'$ à deux rubans qui accepte les mêmes entrées que $M$ et telle que si $M$ s'arrête sur l'entrée $x$ en $t(|x|)$ étapes alors $M'$ s'arrête sur la même entrée en $a + |x| + t(|x|)/c$ étapes au plus.

**Devoir maison :**

Apprendre la biographie wikipédia de Alan Turing.