TD10 – La fin de la tournée ?

Exercice 1. *PCP, en français ou en anglais*

Σ est un alphabet fini et P un ensemble fini de paires de mots sur Σ. Le Problème de Correspondance de Post associé à Σ, P est l'existence d'une suite non vide $(v_i, w_i)_i$ d'éléments de P telle que la concaténation des v_i soit égale à la concaténation des w_i. Le Problème de Correspondance de Post Modifié est celui de l'existence d'une telle suite lorsque le premier terme est fixé.

1. Résoudre PCP pour les instances suivantes :

1. $P = (aab, ab), (bab, ba), (aab, abab)$
2. $P = (a, ab), (ba, aba), (b, aba), (bba, b)$
3. $P = (ab, bb), (aa, ba), (ab, abb), (bb, bab)$
4. $P = (a, abb), (aab, b), (b, aa), (bb, bba)$

2. Montrer que si Σ ne contient qu'une lettre le problème est décidable. Et avec 2 ? et 3 ?

3. Montrer l'équivalence entre PCP et PCPM.

4. Peut-on se passer des couples de la forme (w, w) dans PCPM ?

5. Montrer que PCP est indécidable.

Intermède sur la notion de réduction.

Exercice 2. *Reconnaissance, Réductions d'Ensembles & Co*

On fixe un alphabet fini Σ contenant entre autre les lettres a et b. ε désignera le mot vide. Posons Σ^ω l'ensemble des mots finis sur Σ. On notera enfin M_σ avec $\sigma \in \Sigma^\omega$ la machine de Turing effectuant le programme de code σ. (Plus formellement, $M_\sigma(x) = U(<\sigma, x>)$)

1. Que peut-on dire d'un langage qui est reconnaissable et qui est de complémentaire reconnaissable.

2. Les ensembles suivants sont-ils décidables ? reconnaissables ? de complémentaire reconnaissable ?

1. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_\sigma(\sigma)$ s'arrête$\}$
2. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_\sigma(\varepsilon)$ s'arrête$\}$
3. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_\sigma(abba)$ est défini$\}$
4. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_\sigma(ab)^\frown M_\sigma(ba) = aaa\}$ (avec $^\frown$ l'opérateur de concaténation)
5. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_\sigma(x) = x$ si $M_x(x)$ s'arrête et b sinon$\}$
6. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_w(\sigma) = abb$ avec $w \in \Sigma^\omega\}$
7. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_\sigma$ ne s'arrête sur aucun mot dont σ est un préfixe$\}$
8. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_\sigma(\sigma) = \sigma\}$
9. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_\sigma$ s'arrête sur une partie infinie de $\Sigma^\omega\}$