TD11 – Riz au menu

Exercice 1. *Reconnaissance, Réductions d'Ensembles & Co*

On fixe un alphabet fini Σ contenant entre autre les lettres a et b. ε désignera le mot vide. Posons Σ^ω l'ensemble des mots finis sur Σ. On notera enfin M_σ avec $\sigma \in \Sigma^\omega$ la machine de Turing effectuant le programme de code σ. (Plus formellement, $M_\sigma(x) = U(<\sigma, x>)$)

1. Que peut-on dire d'un langage qui est reconnaissable et qui est de complémentaire reconnaissable.

2. Les ensembles suivants sont-ils décidables ? reconnaissables ? de complémentaire reconnaissable ? (Pour cet exercice, on demande de ne pas utiliser le théorème de Rice)

1. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_\sigma(\sigma)$ s'arrête$\}$
2. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_\sigma(\varepsilon)$ s'arrête$\}$
3. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_\sigma(abba)$ est défini$\}$
4. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_\sigma(ab)^\frown M_\sigma(ba) = aaa\}$ (avec $^\frown$ l'opérateur de concaténation)
5. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_\sigma(x) = x$ si $M_x(x)$ s'arrête et b sinon$\}$
6. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_w(\sigma) = abb$ avec $w \in \Sigma^\omega\}$
7. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_\sigma$ ne s'arrête sur aucun mot dont σ est un préfixe$\}$
8. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_\sigma(\sigma) = \sigma\}$
9. $\{\sigma \in \Sigma^\omega, M_\sigma$ s'arrête sur une partie infinie de $\Sigma^\omega\}$

Exercice 2. *On recommence*

Dans cet exercice, on demandera d'utiliser le théorème de Rice.

1. Existe-t-il une machine de Turing qui décide si la machine donnée en entrée ne s'arrête sur aucune entrée ?

2. Existe-t-il une machine de Turing qui décide si le domaine de la machine donnée en entrée est infinie ?

3. Existe-t-il une machine de Turing qui décide si les deux machines passées en argument calculent la même fonction ?

4. Montrer qu'il n'existe pas de fonction récursive f telle que $f(x) = 1$ si $\phi_x(x)$ est défini et 0 sinon.

Exercice 3. *Énumérons*

1. Montrer qu'un ensemble A est récursif si et seulement si ses éléments peuvent être énumérés par une fonction récursive croissante.

2. Montrer que $A \neq \emptyset$ est récursivement énumérable si et seulement si ses éléments peuvent être énumérés par une fonction récursive totale.

3. Montrer qu'une partie A de $\mathbb{N}$ est récursive si et seulement si A et son complémentaire sont récursivement énumérables.

4. Montrer qu'il existe des fonctions totales f et g telles que, pour tout entier x, $\mathrm{Dom}(\phi_x) = \mathrm{Im}\left(\phi_{f(x)}\right)$ et $\mathrm{Im}\left(\phi_x\right) = \mathrm{Dom}\left(\phi_{g(x)}\right)$. Sont-elles récursives ?