TD1 : Je le vois, mais je ne le crois pas

On définit :
- $f : A \hookrightarrow B \equiv f$ est une injection de A dans B
- $f : A \twoheadrightarrow B \equiv f$ est une surjection de A dans B
- $f : A \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow B \equiv f$ est une bijection de A dans B

Exercice 1. *Injection ? Surjection ?*

1. Montrer que si $f : A \hookrightarrow B$ et si $A \neq \emptyset$, alors $\exists g : B \twoheadrightarrow A$.

2. Et si $A = \emptyset$?

3. Et l'inverse ? Difficile de choisir...

Exercice 2. *Un peu de prog...*

1. En prog, une fonction qui prend A et renvoie B peut prendre un sous-type de A et renvoyer un sur-type de B. Et pour les fonctions ensemblistes ?

2. Montrer que par contre on a bien $A^{B\times C} \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow \left(A^B\right)^C$

Exercice 3. *Quand Thor*

1. Montrer $\forall X \nexists f : X \twoheadrightarrow \mathcal{P}(X)$ (Cantor fort)

2. En déduire $\forall X \nexists f : \mathcal{P}(X) \hookrightarrow X$ (Cantor faible)

3. Dans le même style : $\forall A \exists x, x \notin A$

4. Même question, mais cette fois je vous impose $x = \mathcal{P}(\cup A)$

5. Et $\cup\mathcal{P}(A)$, c'est quoi ?

Exercice 4. *Quand Thor berne Stein*

On suppose (jusqu'à ce qu'on l'ait montré) que si $f : A \hookrightarrow B$ et $g : B \hookrightarrow A$, alors $\exists h : A \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$

1. Montrer que si $f : X \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow X \times X$, avec X infini, alors $\exists g : \mathcal{P}(X) \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ (un conseil : regardez $2 \times X$...)

2. Montrer que $\exists f : \mathbb{R} \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$

3. En déduire que $\exists g : \mathbb{R} \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

Maintenant on le démontre, trois fois !

4. Lemme : Si $B \subseteq A$ et si $f : A \hookrightarrow B$, alors $\exists g : A \hookrightarrow\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ (utiliser $C = \cup_{n\in\mathbb{N}}\{f^n(A \setminus B)\}$). En déduire le théorème de Cantor-Bernstein.

5. Partitionner A suivant la clôture réflexive symétrique transitive de l'application $g \circ f$ (qui est une relation d'équivalence), et définir une bijection par cas (il y en a 4).

6. Lemme : si $G : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ est telle que $\forall X, Y \in \mathcal{P}(A), X \subseteq Y \Rightarrow G(X) \subseteq G(Y)$, alors $\exists M, G(M) = M$. En déduire le théorème de Cantor-Bernstein avec $G : X \mapsto A \setminus g\left(B \setminus f(X)\right)$