# TD2 : Dieu a fait les nombres entiers, tout le reste est l'œuvre de l'homme (Kronecker)

Déf : Un **ordre** sur un ensemble $E$ est un ensemble de couples $R \in \mathcal{P}(E \times E)$ (on notera $xRy$ au lieu de $(x, y) \in R$) qui vérifie les trois relations suivantes :
- $(\forall x \in E)\ xRx$ (réflexivité)
- $(\forall x, y \in E)[(xRy \wedge yRx) \Rightarrow x = y]$ (antisymétrie)
- $(\forall x, y, z \in E)[(xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz]$ (transitivité)

Déf : Un **ensemble ordonné** $\mathcal{A}$ est un couple $(E, R)$ où $R$ est un ordre sur $E$. Dans la suite, si $\mathcal{A}$ est un ensemble ordonné, on notera $A$ l'ensemble sous-jacent et $\leqslant_{\mathcal{A}}$ l'ordre sous-jacent, i.e. : $\mathcal{A} = (A, \leqslant_{\mathcal{A}})$.
Déf : Un **bon ordre** $R$ sur un ensemble $A$ est un ordre sur $A$ tel que toute partie non vide admet un plus petit élément. Formellement, un bon ordre est un ordre qui vérifie la propriété suivante :
- $(\forall X \subseteq A)[X \neq \varnothing \implies (\exists x \in X)(\forall y \in X)\ xRy]$

Déf : Un **ensemble bien ordonné** $\mathcal{A}$ est un couple $(A, \leqslant_{\mathcal{A}})$ où $\leqslant_{\mathcal{A}}$ est un bon ordre sur $A$. On travaille maintenant uniquement avec des ensembles bien ordonnés.
Notation : si $X \subseteq A$ est non vide et si $x \in X$ vérifie $(\forall y \in X)\ x \leqslant_{\mathcal{A}} y$, ce $x$ est unique et on le note :

$$x = \min(X)$$

✎ Montrer que si un ensemble est bien ordonné, alors son ordre est total, i.e. :

$$(\forall x, y \in A)\ x \leqslant_{\mathcal{A}} y \vee y \leqslant_{\mathcal{A}} x$$

**Exercice 1.** *Trichotomie*

Notation : Si $A$ est non vide, on note :

$$0 = \min(A)$$

Déf : Si $x \in \mathcal{A}$, on définit le **successeur** de $x$ (s'il existe) par :

$$S(x) = \min\{y \in A \mid x <_{\mathcal{A}} y\} \qquad (\text{où } x <_{\mathcal{A}} y \equiv x \leqslant_{\mathcal{A}} y \wedge x \neq y)$$

Déf : Si $x \in \mathcal{A}$, $x$ est dit **élément limite** si $x \neq 0$ et si :

$$(\forall y \in A)[y <_{\mathcal{A}} x \Rightarrow (\exists z \in A)(y <_{\mathcal{A}} z <_{\mathcal{A}} x)]$$

✎ Montrer que pour tout $x \in A$, une et une seule de ces trois propriés est vérifiée :
- $x = 0$
- $(\exists y \in A)\ x = S(y)$
- $x$ est limite

**Exercice 2.** *Segments initiaux*

Déf : Soient $\mathcal{A} = (A, \leqslant_A)$ et $\mathcal{B} = (B, \leqslant_B)$ deux ensembles bien ordonnés. On dit que $\mathcal{B}$ est un **segment initial** de $\mathcal{A}$ si les conditions suivantes sont satisfaites

1. $B \subseteq A$
2. $(\forall x \in B)(\forall y \in A)(y \leqslant_{\mathcal{A}} x \Rightarrow y \in B)$
3. $(\forall x, y \in B)(x \leqslant_{\mathcal{B}} y \Leftrightarrow x \leqslant_{\mathcal{A}} y)$ (ce qui peut s'écrire : $\leqslant_{\mathcal{B}} = \leqslant_{\mathcal{A}} \cap B \times B$)

On notera dans ce cas $\mathcal{B} \sqsubseteq \mathcal{A}$.
Déf : Pour tout $x \in A$, on note $\mathcal{S}eg(x) = (Seg(x), \leqslant_{\mathcal{S}eg(x)})$ où :
- $Seg(x) = \{y \in A \mid y <_{\mathcal{A}} x\}$
- $(\forall y, z \in Seg(x))(y \leqslant_{\mathcal{S}eg(x)} z \Leftrightarrow y \leqslant_{\mathcal{A}} z)$ (ce qui peut s'écrire : $\leqslant_{\mathcal{S}eg(x)} = \leqslant_{\mathcal{A}} \cap Seg(x) \times Seg(x)$)

✎ Montrer que si $\mathcal{A} \sqsubseteq \mathcal{B}$, alors soit $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, soit $(\exists x \in B)\ \mathcal{A} = \mathcal{S}eg(x)$.

**Exercice 3.** *Morphismes*

Déf : une fonction $\phi : A \to B$ est appelée **morphisme** de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ si :

$$(\forall x, y \in A)[x \leqslant_{\mathcal{A}} y \Leftrightarrow \phi(x) \leqslant_{\mathcal{B}} \phi(y)]$$

**1.** Montrer que $\phi$ est un morphisme si et seulement si $\phi$ est strictement croissante.

Déf : on définit la relation $=_o$ par :

$$\mathcal{A} =_o \mathcal{B} \equiv \exists\phi \text{ isomorphisme (morphisme bijectif) de } \mathcal{A} \text{ dans } \mathcal{B}$$

**2.** Montrer que $=_o$ est une relation d'équivalence (sur la classe des ensembles bien ordonnés).

**3.** Montrer que si $\phi$ est un morphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}$, alors $(\forall x \in A)[x \leqslant_{\mathcal{A}} \phi(x)]$.

**4.** Montrer que si $\mathcal{A} \subsetneq \mathcal{B}$, alors $\mathcal{A} \neq_o \mathcal{B}$.

Définition : on définit les relations $\leqslant_o$ et $<_o$ (toujours sur la classe des ensembles bien ordonnés) par :

$$\mathcal{A} \leqslant_o \mathcal{B} \equiv (\exists \mathcal{C} \sqsubseteq \mathcal{B})\ \mathcal{A} =_o \mathcal{C}$$

$$\mathcal{A} <_o \mathcal{B} \equiv \mathcal{A} \leqslant_o \mathcal{B} \wedge \mathcal{A} \neq_o \mathcal{B}$$

**5.** Montrer que $\leqslant_o$ est un préordre (partiel pour l'instant...) dont la relation d'équivalence associée est la relation $=_o$, i.e. : montrer que pour tous ensembles bien ordonnés $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ :

1. $\mathcal{A} \leqslant_o \mathcal{A}$
2. Si $\mathcal{A} \leqslant_o \mathcal{B}$ et si $\mathcal{B} \leqslant_o \mathcal{C}$ alors $\mathcal{A} \leqslant_o \mathcal{C}$
3. Si $\mathcal{A} \leqslant_o \mathcal{B}$ et si $\mathcal{B} \leqslant_o \mathcal{A}$ alors $\mathcal{A} =_o \mathcal{B}$

**Exercice 4.** *Transfinitude*

$\mathcal{A}$ désignera toujours un ensemble bien ordonné.

**1.** Montrer le principe d'induction transfinie :
Si $P$ est une formule à une variable libre et si :

$$(\forall x \in A)[[(\forall y \in A)\ y <_{\mathcal{A}} x \Rightarrow P(y)] \Rightarrow P(x)]$$

alors $(\forall x \in A)\ P(x)$

**2.** Soit $E$ un ensemble quelconque, soit $h : (A \rightharpoonup E) \times A \to E$ (où on note $f : E \rightharpoonup F$ si $f$ est une fonction partielle de $E$ dans $F$), alors montrer que pour tout $x \in A$, il existe une unique fonction $\phi_x : \mathcal{S}eg(x) \to E$ telle que :

$$(\forall y \in \mathcal{S}eg(x))[\phi_x(y) = h(\phi_{x|\mathcal{S}eg(y)}, y)]$$

on procèdera par trichotomie et on utilisera le principe d'induction transfinie

Déf : On définit le successeur d'un ensemble bien ordonné $\mathcal{A}$ par $\mathcal{S}(\mathcal{A}) = (S(\mathcal{A}), \leqslant_{\mathcal{S}(\mathcal{A})})$ où

$$S(\mathcal{A}) = \left\{\mathcal{T} \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}\left(A^2\right) \mid \mathcal{T} \text{ est un segment initial de } \mathcal{A}\right\}$$

$$(\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in S(\mathcal{A}))(\mathcal{T}_1 \leqslant_{\mathcal{S}(\mathcal{A})} \mathcal{T}_2 \Leftrightarrow \mathcal{T}_1 \leqslant_o \mathcal{T}_2)$$

**3.** Montrer que si $\mathcal{A} =_o \mathcal{B}$, alors $\mathcal{S}(\mathcal{A}) =_o \mathcal{S}(\mathcal{B})$.

**4.** Montrer que $\mathcal{A} <_o \mathcal{S}(\mathcal{A})$.

**5.** Théorème de récursion transfinie : avec les mêmes hypothèses que précédemment, montrer qu'il existe une unique fonction $f : A \to E$ telle que :

$$(\forall x \in \mathcal{A})\ f(x) = h\left(f_{|\mathcal{S}eg(x)}, x\right)$$

**Exercice 5.** *Conclusions*

On obtient enfin ces résultats sur $\leqslant_o$ :

**1.** Déduire de tout ce qui précède que $\leqslant_o$ est une relation totale.

**2.** Montrer que $\mathcal{A} \leqslant_o \mathcal{B}$ si et seulement s'il existe un morphisme de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$.

**3.** Montrer que $\leqslant_o$ est une relation bien fondée.