TD3 : There is a set A that is not too big

Exercice 1. $A^2 = A$

Déf : On définit les relations $\leq_c$, $=_c$ et $<_c$ sur la classe de tous les ensembles par :

$$A \leq_c B \equiv \exists \phi : A \hookrightarrow B$$

$$A =_c B \equiv A \leq_c B \wedge B \leq_c A$$

$$A <_c B \equiv A \leq_c B \wedge A \neq_c B$$

Remarque : D'après le théorème de Cantor-Bernstein, on a :

$$A =_c B \Leftrightarrow \exists \phi : A \hookrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow B$$

On va montrer que si $\mathcal{A}$ est un ensemble bien ordonné infini, alors $A =_c A \times A$. On raisonne par l'absurde.

1. Utiliser le fait que $\leq_o$ (défini au TD2) est un bon ordre pour trouver $\mathcal{A}$ minimal pour $\leq_o$ tel que $A \neq_c A \times A$.

On suppose maintenant ce $\mathcal{A}$ fixé dans toute la suite de l'exercice.

2. Montrer qu'alors $(\forall x \in A)\ A \not\leq_c Seg(x)$

On définit sur $A \times A$ l'ordre $\leq_g$ (le "g" est pour Gödel) par :

$$(x_1, y_1) \leq_g (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \max(x_1, y_1) <_{\mathcal{A}} \max(x_2, y_2) \\ \quad\text{ou} \\ \max(x_1, y_1) = \max(x_2, y_2) \wedge x_1 <_{\mathcal{A}} x_2 \\ \quad\text{ou} \\ \max(x_1, y_1) = \max(x_2, y_2) \wedge x_1 = x_2 \wedge y_1 \leq_{\mathcal{A}} y_2 \end{cases}$$

3. Montrer que $\leq_g$ est un bon ordre sur $A \times A$
4. Montrer que $\mathcal{A} <_o (A \times A, \leq_g)$
5. En déduire qu'on a $(a, b) \in A \times A$ tel que $\mathcal{A} =_o \mathcal{S}eg(a, b)$
6. Montrer suivant que $a = b$, $a <_{\mathcal{A}} b$ ou $a >_{\mathcal{A}} b$ qu'on a $Seg(a, b) <_c A$
7. Conclure
8. En déduire qu'avec l'axiome du choix la propriété est vraie pour tous les ensembles

Exercice 2. *Bonne fondation*

Déf : On appelle axiome de bonne fondation la proposition suivante :

$$(\forall a)[a \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x \in a)(x \cap a = \emptyset)]$$

Déf : Une relation binaire R sur un ensemble A sera dite bien fondée si pour tout $P \subseteq A$ on a :

$$(\forall x \in A)[(\forall y \in A)(y\ R\ x \Rightarrow y \in P) \Rightarrow x \in P] \Rightarrow (\forall x \in A)(x \in P)$$

1. Montrer qu'une relation binaire R sur A est bien fondée si et seulement si :

$$(\forall X \subseteq A)[X \neq \emptyset \Rightarrow (\exists x \in X)(\forall y \in X)\neg(y\, R\, x)]$$

Rappel : Un ensemble est dit transitif si tous ses éléments en sont des sous-ensembles

2. Définir par schéma d'axiomes de remplacement la clôture transitive d'un ensemble A, $Cl(A)$:

$$\text{“}\bigcup_{n\in\omega}(\cup^n A)\text{”}$$

3. Montrer que $Cl(A)$ est le plus petit ensemble transitif contenant A

Déf : Un ensemble est dit bien fondé si la relation "$\in$" est bien fondée sur sa clôture transitive

4. Montrer que l'axiome de bonne fondation est équivalent à la proposition "tout ensemble est bien fondé" (on raisonnera par contraposition)

Déf : On définit par récurrence transfinie la hiérarchie cumulative indexée par les ordinaux par :

$$V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathcal{P}(V_\beta)$$

5. Montrer que si $\alpha \leq \beta$, alors $V_\alpha \subseteq V_\beta$

6. Montrer que pour tout α, V_α est transitif

7. Montrer que :
- $V_0 = \emptyset$
- $V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$
- $V_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} V_\beta$ si α est limite

8. Montrer que $\alpha \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$

9. Montrer que si $A \in V_\alpha$, alors $Cl(A) \in V_\alpha$, en déduire que

$$(\forall X \subseteq Cl(A))(X \neq \emptyset \Rightarrow \{\alpha|(\exists x \in X)(x \in V_\alpha)\} \neq \emptyset)$$

puis en déduire que A est bien fondé

10. Montrer le principe d'induction ensembliste : si P est un prédicat tel que

$$\forall a[(\forall x \in a)P(x)] \Rightarrow P(a)$$

alors pour tout ensemble bien fondé b, on a $P(b)$

11. En déduire qu'un ensemble bien fondé est dans un V_α

Exercice 3. *Autour du choix*

Pour ceux qui veulent aller plus loin :

1. Théorème de Tychonov (un produit de compacts est compact) $\Leftrightarrow$ Axiome du choix

2. Théorème de Baire (dans un espace métrique complet, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense) $\Leftrightarrow$ Axiome du choix dépendant ($\Rightarrow$ très difficile...)