TD4 : Les mathématiques sont un jeu que l'on exerce selon des règles simples en manipulant des symboles ou des concepts qui n'ont en soi, aucune importance particulière.

Rappel :
Déf : Les **formules** sont définies inductivement par :

$$A, B ::= \top \mid \bot \mid A \Rightarrow B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall x A \mid \exists x A$$

Déf : Les **règles de déduction** sont les suivantes :

$$\frac{}{\Gamma \vdash A}\ {\scriptstyle A \in \Gamma} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow \bot \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x A}\ {\scriptstyle x \notin FV(\Gamma)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall x A}{\Gamma \vdash A\{x := t\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A\{x := t\}}{\Gamma \vdash \exists x A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists x A \quad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ {\scriptstyle x \notin FV(\Gamma, C)}$$

Exercice 1. *Règles admissibles*

Déf : On définit l'inclusion des contextes par :

$$\Gamma \subseteq \Gamma' \equiv \text{ pour tout } A \in \Gamma, \text{ on a } A \in \Gamma'$$

1. Montrer par induction sur la dérivation que :

$$\Gamma \vdash A \text{ et } \Gamma \subseteq \Gamma' \text{ implique } \Gamma' \vdash A$$

2. En déduire que les règles suivantes sont admissibles :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma' \vdash A}\ {\scriptstyle \Gamma \subseteq \Gamma'} \qquad \frac{A_1, \ldots A_n \vdash B}{A_{\sigma(1)}, \ldots A_{\sigma(n)} \vdash B}\ {\scriptstyle \sigma \in \mathfrak{S}_n} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma, A \vdash B} \qquad \frac{\Gamma, A, A \vdash B}{\Gamma, A \vdash B}$$

3. En déduire que la logique intuitionniste est incluse dans la logique classique

Rappel : La logique intuitionniste est obtenue en remplaçant la règle $\dfrac{\Gamma, A \Rightarrow \bot \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}$ par la règle $\dfrac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}$

Exercice 2. *Dérivations*

✎ Ecrire les arbres de preuve pour les propriétés suivantes :

$P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$	$P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
$P \wedge (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \wedge R$	$P \vee (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \vee R$
$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge R)$	$(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee R)$
$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$	$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$
$(P \Rightarrow \neg Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge Q)$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
$((P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \neg Q)) \Leftrightarrow \neg P$	$((P \vee Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)$
$((P \wedge Q) \Rightarrow R) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R) \vee (Q \Rightarrow R)$	$(P \Rightarrow P \wedge Q) \vee (Q \Rightarrow P \wedge Q)$
$(P \Rightarrow P \vee Q) \wedge (Q \Rightarrow P \vee Q)$	$\forall x \neg A \Leftrightarrow \neg(\exists x A)$
$\exists x \neg A \Leftrightarrow \neg(\forall x A)$	$(\forall x A \wedge \forall x B) \Leftrightarrow \forall x(A \wedge B)$
$(\forall x A \vee \forall x B) \Rightarrow \forall x(A \vee B)$	$B \Leftrightarrow \forall x B$ si $x \notin FV(B)$
$\forall x(A \vee B) \Leftrightarrow (\forall x A \vee \forall x B)$ si $x \notin FV(B)$	$(\exists x A \vee \exists x B) \Leftrightarrow \exists x(A \vee B)$
$\exists x(A \wedge B) \Rightarrow (\exists x A \wedge \exists x B)$	$B \Leftrightarrow \exists x B$ si $x \notin FV(B)$
$\exists x(A \wedge B) \Leftrightarrow (\exists x A \wedge \exists x B)$ si $x \notin FV(B)$	$\exists x(A \Rightarrow \forall y A\{x := y\})$ si $y \notin FV(A)$

Exercice 3. *Equivalence de connecteurs*

On étend le langage des formules vu en cours avec la définition suivante :

$$\begin{aligned} A, B ::= & \top \mid \bot \mid A \Rightarrow B \mid A \wedge B \mid A \vee B \mid \forall x A \mid \exists x A \\ & \mid \top^* \mid \bot^* \mid A \Rightarrow^* B \mid A \wedge^* B \mid A \vee^* B \mid \forall^* x A \mid \exists^* x A \end{aligned}$$

On étend le système de règles vu en cours avec les règles suivantes :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top^*} \qquad \frac{\Gamma, A \Rightarrow^* \bot^* \vdash \bot^*}{\Gamma \vdash A}$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow^* B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow^* B \quad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \quad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge^* B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge^* B}{\Gamma \vdash A} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge^* B}{\Gamma \vdash B}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee^* B} \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee^* B} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee^* B \quad \Gamma, A \vdash C \quad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall^* x A}\ x \notin FV(\Gamma) \qquad \frac{\Gamma \vdash \forall^* x A}{\Gamma \vdash A\{x := t\}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A\{x := t\}}{\Gamma \vdash \exists^* x A} \qquad \frac{\Gamma \vdash \exists^* x A \quad \Gamma, A \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ x \notin FV(\Gamma, C)$$

✎ Montrer que l'on a :

- $\vdash \top^* \Leftrightarrow \top$
- $\vdash \bot^* \Leftrightarrow \bot$
- $\vdash (A \Rightarrow^* B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$
- $\vdash (A \wedge^* B) \Leftrightarrow (A \wedge B)$
- $\vdash (A \vee^* B) \Leftrightarrow (A \vee B)$
- $\vdash (\forall^* x A) \Leftrightarrow (\forall x A)$
- $\vdash (\exists^* x A) \Leftrightarrow (\exists x A)$