TD5 : Toute démonstration purement logique peut se ramener à une forme normale qui ne comporte pas de détours. On n'y introduit aucun concept qui ne soit pas contenu dans son résultat final.

Exercice 1. $LK \Rightarrow NK$

Notation : On notera $\Gamma \vdash_{LK} \Delta$ lorsque le séquent $\Gamma \vdash \Delta$ est dérivable en calcul des séquents, et $\Gamma \vdash_{NK} A$ lorsque $\Gamma \vdash A$ est dérivable en déduction naturelle. Si $\Delta = A_1, \ldots, A_n$, on notera également $\overline{\Delta} = \neg A_1, \ldots, \neg A_n$.

1. Montrer qu'à toute dérivation $\Gamma \vdash_{LK} \Delta$ on peut associer une dérivation $\Gamma, \overline{\Delta} \vdash_{NK} \bot$.
2. En déduire que si $\Gamma \vdash_{LK} A$, alors $\Gamma \vdash_{NK} A$

Ainsi, le sens inverse ayant été vu en cours, on peut démontrer exactement les mêmes formules en calcul des séquents et en déduction naturelle.

Exercice 2.

Supposons donnée une théorie (i.e. : un ensemble de symboles de fonctions avec leur arité, un ensemble de symboles de relations avec leur arité et un ensemble de formules closes, les axiomes). On suppose que l'ensemble des relations contient une relation binaire $\equiv$ (on notera $x \equiv y$ pour $\equiv(x, y)$) et que l'ensemble des axiomes contient :

- L'axiome $(\forall x)(x \equiv x)$
- Le schéma d'axiomes suivant, paramétré par f symbole de fonction d'arité n :

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(\forall y_1) \ldots (\forall y_n)(x_1 \equiv y_1 \wedge \ldots \wedge x_n \equiv y_n \Rightarrow f(x_1, \ldots, x_n) \equiv f(y_1, \ldots, y_n))$$

- Le schéma d'axiomes suivant, paramétré par R symbole de relation d'arité n :

$$(\forall x_1) \ldots (\forall x_n)(\forall y_1) \ldots (\forall y_n)(x_1 \equiv y_1 \wedge \ldots \wedge x_n \equiv y_n \wedge R(x_1, \ldots, x_n) \Rightarrow R(y_1, \ldots, y_n))$$

1. Montrer qu'alors les formules suivantes sont dérivables :

$$(\forall x)(\forall y)(x \equiv y \Rightarrow y \equiv x)$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \equiv y \wedge y \equiv z \Rightarrow x \equiv z)$$

2. Montrer que pour tout terme t, la formule suivante est dérivable :

$$x \equiv y \Rightarrow t\{z := x\} \equiv t\{z := y\}$$

3. Montrer que pour toute formule A, la formule suivante est dérivable :

$$x \equiv y \Rightarrow (A\{z := x\} \Leftrightarrow A\{z := y\})$$

Exercice 3.

On considère une théorie T contenant au moins un symbole de relation binaire $\in$, ainsi que le schéma d'axiomes :

$$(\exists x)(\forall y)(y \in x \Leftrightarrow A\{z := y\})$$

où A est une formule quelconque.

✎ Formaliser le paradoxe de Cantor pour prouver :

$$T \vdash \bot$$

Remarque : L'unique axiome suivant, instance du schéma précédent, est en fait suffisant :

$$(\exists x)(\forall y)(y \in x \Leftrightarrow \neg(y \in y))$$