TD6 : Retour des infusions basmati, cantonaises, ...

Rappels :

Axiomes de Z : $\mathcal{L} = \{\in, =\}$

$$(\forall x)(\forall y)((\forall z)(z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$$
$$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall t)(t \in z \Leftrightarrow t = x \vee t = y)$$
$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow (\exists t)(z \in t \wedge t \in x))$$
$$(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow (\forall t)(t \in z \Rightarrow t \in x))$$
$$(\forall x_1 \dots \forall x_n)(\forall x)(\exists y)(\forall z)(z \in y \Leftrightarrow z \in x \wedge \phi) \text{ où } FV(\phi) = \{x_1, \dots, x_n, z\}$$
$$(\exists x)((\exists y)(y \in x) \wedge (\forall y)[y \in x \Rightarrow (\exists z)(y \in z \wedge z \in x)])$$

Axiomes de PA_0 : $\mathcal{L}_P = \{=, 0, S, +, \times\}$

$$(\forall x)\mathrm{S(x)} \neq 0$$
$$(\forall x)(\forall y)(\mathrm{S(x)} = \mathrm{S(y)} \Rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y})$$
$$(\forall x)(x = 0 \vee (\exists z)x = \mathrm{S(z)})$$
$$(\forall x)x + 0 = x$$
$$(\forall x)(\forall y)x + \mathrm{S(y)} = \mathrm{S(x+y)}$$
$$(\forall x)x \times 0 = 0$$
$$(\forall x)(\forall y)x \times \mathrm{S(y)} = \mathrm{x \times y + x}$$

Axiomes de PA : Axiomes de PA_0 plus schéma d'axiomes de récurrence :

$$(\forall x_1 \dots \forall x_n)\,(\phi\{y := 0\} \wedge \forall x\,(\phi\{y := x\} \to \phi\{y := Sx\})) \to \forall x \phi\{y := x\}$$

où $FV(\phi) = \{x_1, \dots, x_n, y\}$

Exercice 1.

1. Donner une extension conservative de la théorie de Z sur le langage :

$$\mathcal{L}' = \left\{\in; =; \emptyset; \subseteq; \mathcal{P}; \bigcup; \cup\right\}$$

où $\emptyset$ est un symbole de constante, $\mathcal{P}$ et $\bigcup$ sont des symboles de fonction d'arité 1, $\cup$ est un symbole de fonction d'arité 2 et $\subseteq$ est un symbole de prédicat d'arité 2 (on demandera à ce que les nouveaux symboles aient leur signification habituelle et que les anciens axiomes soient réécrits de manière plus naturelle dans le nouveau langage).

2. Soit PA_{ord} la théorie :

$$\mathrm{PA} \cup \{(\forall \mathrm{x})(\forall \mathrm{y})\mathrm{x} \leq \mathrm{y} \Leftrightarrow (\exists \mathrm{z})\mathrm{x} + \mathrm{z} = \mathrm{y}; (\forall \mathrm{x})(\forall \mathrm{y})(\forall \mathrm{z})\mathrm{x} \leq \mathrm{y} \Rightarrow \mathrm{x} + \mathrm{z} \leq \mathrm{y} + \mathrm{z}\}$$

pour le langage $\mathcal{L}_P \cup \{\leq\}$. Montrer que PA_{ord} est une extension conservative de PA.

Exercice 2.

1. Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathrm{PA}_0 \vdash \mathrm{S^{n+1}(0)} \neq \mathrm{S^n(0)}$.

2. Montrer que PA$\vdash (\forall x)\mathrm{S(x)} \neq \mathrm{x}$.

3. Expliquer pourquoi $\mathrm{PA}_0 \nvdash (\forall x)\mathrm{S(x)} \neq \mathrm{x}$ (pour une vraie preuve, il va falloir attendre encore une semaine !).

4. Montrer que PA$\vdash (\forall x)(\forall y)x \times y = y \times x$.

5. Expliquer pourquoi $\mathrm{PA}_0 \nvdash (\forall x)(\forall y)x \times y = y \times x$ (idem).