TD7 : Théorie des modèles

Exercice 1.
Dans chacun des langages ci-dessous, trouver une formule qui sépare les deux structures données avec le langage :

$$
\begin{array}{rcl}
<\leq> & <\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}}> & <\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}}> \\
<\leq> & <\mathbb{Q}, \leq_{\mathbb{Q}}> & <\mathbb{Z}, \leq_{\mathbb{Z}}> \\
<*, => & <\mathbb{N}, \times, => & <\P(\mathbb{N}), \cap, => \\
<c, *, => & <\mathbb{N}, 1, \times, => & <\mathbb{Z}, 1, \times, => \\
<c, d, *, => & <\mathbb{R}, 0, 1, \times, => & <\mathbb{Q}, 0, 1, \times, =>
\end{array}
$$

Exercice 2. *Une arithmétique non standard*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{T}_n$ la théorie du premier ordre dont le langage est le langage de l'arithmétique de Peano étendu avec un nouveau symbole de constante c et dont les axiomes sont :
– les axiomes de PA, où le schéma de récurrence est étendu à toutes les formules du nouveau langage (i.e. contenant la constante c)
– les axiomes $c \neq 0, c \neq 1, \ldots, c \neq \mathrm{S}^n(0)$
Enfin, on note $\mathcal{T}_\infty = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$ la théorie limite.

1. Montrer que si PA est cohérente, alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la théorie $\mathcal{T}_n$ est cohérente également. Pour cela, on montrera que toute incohérence de $\mathcal{T}_n$ peut être transformée en une incohérence de PA.

2. En déduire que $\mathcal{T}_\infty$ est cohérente (si PA l'est).

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathcal{T}_\infty \vdash n < c$.

4. Montrer que $\mathcal{T}_\infty \vdash \exists x\, c = s(x)$ et $\mathcal{T}_\infty \vdash \exists y\, (c = 2y \vee c = 2y + 1)$.

5. Que peut-on dire (dans $\mathcal{T}_\infty$) de la parité de c ? de sa primalité ?

Exercice 3. *Une théorie infinitaire*
On considère la théorie $\mathcal{T}$ dont le langage est formé à partir d'un unique symbole de prédicat r et dont les axiomes sont :

$$
\begin{array}{ll}
(A_1) & (\exists x)(\exists y) r(x, y) \\
(A_2) & (\forall x) \neg r(x, x) \\
(A_3) & (\forall x)(\forall y)(\forall z)(r(x, y) \wedge r(y, z) \Rightarrow r(x, z)) \\
(A_4) & (\forall x)(\forall y)(r(x, y) \Rightarrow (\exists z)(r(x, z) \wedge r(z, y)))
\end{array}
$$

1. Donner plusieurs modèles de $\mathcal{T}$. En déduire que $\mathcal{T}$ est cohérente.

2. Montrer que tout modèle de $\mathcal{T}$ est infini.

3. Montrer que pour tout $i \in [1..4]$, la théorie $\mathcal{T}_i = \mathcal{T} \setminus A_i$ admet un modèle fini. On exhibera un modèle minimal pour chaque valeur de i.

Exercice 4. *Théories égalitaires*
Soit $\mathcal{T}$ une théorie égalitaire. On dit qu'un modèle $\mathcal{M}$ de $\mathcal{T}$ est *égalitaire* lorsque le prédicat d'égalité est interprété par la relation d'égalité dans le modèle, c'est-à-dire $(=)^{\mathcal{M}}(v_1, v_2) = 1$ ssi $v_1 = v_2$ (pour tous $v_1, v_2 \in \mathcal{M}$).

✎ Montrer que tout modèle $\mathcal{M}$ d'une théorie égalitaire $\mathcal{T}$ peut être transformé en un modèle égalitaire $\mathcal{M}'$ de $\mathcal{T}$ tel que pour toute formule close de $\mathcal{T}$ on ait $\mathcal{M} \models A$ ssi $\mathcal{M}' \models A$. On justifiera la construction du modèle $\mathcal{M}'$, ainsi que l'équivalence $\mathcal{M} \models A$ ssi $\mathcal{M}' \models A$.

Dans tout ce qui suit, on ne considère que des modèles égalitaires.

Exercice 5. *Le rouge et le noir*

On considère le langage défini par un symbole de fonction unaire f, un symbole de prédicat unaire $=$ et deux symboles de prédicat binaires R et B, ainsi que la théorie égalitaire définie sur ce langage par les axiomes suivants :

$$(\forall x)(R(x) \Leftrightarrow \neg B(x))$$
$$(\forall x)(\forall y)(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y)$$
$$(\forall x)(R(x) \Leftrightarrow B(f(x)))$$

1. Donner deux modèles (égalitaires et non isomorphes) de cette théorie.

2. Montrer (dans $\mathcal{T}$) que $(\forall x)(B(x) \Leftrightarrow R(f(x)))$

3. Montrer que tout modèle fini de la théorie est de cardinal pair.

4. Montrer que la théorie n'est pas complète, en exhibant une formule close A telle que $\mathcal{T} \nvdash A$ et $\mathcal{T} \nvdash \neg A$.

Exercice 6. *Théories finitaires*

On se place dans une théorie égalitaire quelconque :

1.

Pour chaque entier $n \in \mathbb{N}$, formaliser les énoncés suivants :
- ϕ_n : la structure a au moins n éléments.
- ψ_n : la structure a au plus n éléments.
- E_n : la structure a exactement n éléments.

On appelle le *spectre* de $\mathcal{T}$ l'ensemble des cardinaux de ses modèles finis égalitaires.

2. Donner des exemples de théories ayant les spectres suivants :

$$\emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{N}^*, \{2\}, 2\mathbb{N}^*, \{p^2 \ : \ p \in \mathbb{N}^*\}, \{n \in \mathbb{N}^* | n \text{ n'est pas premier}\}$$

3. Montrer que toute théorie égalitaire dont le spectre est infini admet un modèle égalitaire infini.

4. Montrer que toute théorie égalitaire dont le spectre contient plusieurs éléments n'est pas complète.

5. Montrer que la théorie des groupes finis n'est pas axiomatisable au premier ordre.

Exercice 7. On considère le langage défini par un symbole de fonction unaire s et deux symboles de prédicat binaires $=$ et r, ainsi que la théorie égalitaire définie par les axiomes suivants :

$$(\exists x)(\forall y) r(x, y)$$
$$(\forall x)(\forall y)(\mathrm{S(x)} = \mathrm{S(y)} \Rightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y})$$
$$(\forall x)(\mathrm{S(x)} \neq \mathrm{x})$$
$$(\forall x)(\forall y)(r(x, y) \wedge r(y, \mathrm{S(x)}) \Leftrightarrow \mathrm{x} = \mathrm{y} \vee \mathrm{y} = \mathrm{S(x)})$$
$$(\forall x)(\forall y)(r(x, y) \wedge r(y, x) \Leftrightarrow x = y)$$
$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)(r(x, y) \wedge r(y, z) \Rightarrow r(x, z))$$

1. Donner deux modèles non-isomorphes de T.

2. Pouvez-vous trouver une formule qui distingue ces deux modèles ?