# TD8 : Modèles et ultrafiltres

$I$ désigne un ensemble quelconque non vide.

**Exercice 1.** *Ultrafiltres*

On dit qu'un ensemble $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(I)$ de parties de $I$ est un *filtre* sur $I$ s'il satisfait les conditions suivantes :
- $\emptyset \notin \mathcal{U}$
- $I \in \mathcal{U}$
- $J \in \mathcal{U} \wedge J \subseteq J' \Rightarrow J' \in \mathcal{U}$
- $J \in \mathcal{U} \wedge J' \in \mathcal{U} \Rightarrow J \cap J' \in \mathcal{U}$

On dira que $I$ est un *ultrafiltre* si $I$ vérifie de plus
- $(\forall J)(J \in \mathcal{U} \vee (I \setminus J) \in \mathcal{U})$

**1.** Vérifier que si $\mathcal{U}$ est un ultrafiltre, alors pour tous $J, J' \subseteq I$ :

$$J \cup J' \in \mathcal{U} \Leftrightarrow J \in \mathcal{U} \vee J' \in \mathcal{U}$$

$$J \cap J' \in \mathcal{U} \Leftrightarrow J \in \mathcal{U} \wedge J' \in \mathcal{U}$$

Une *base de filtre* $A$ est un ensemble de parties tel que pour tous $X_1, \dots, X_n \in A$,

$$\bigcap_{1 \leq i \leq n} X_i \neq \emptyset$$

**2.** Montrer que toute base de filtre peut être complétée en une famille stable par intersection finie qui peut elle même être complétée en un filtre.

**3.** Remarquer que tout filtre est un idéal (dans l'anneau commutatif $(\mathcal{P}(I), \Delta^c, \cup, I, \emptyset)$ où $\Delta^c$ est le complémentaire de la différence symétrique) pour montrer que tout filtre est inclus dans un ultrafiltre (montrer le théorème de Krull qui affirme qu'avec l'axiome du choix, tout idéal d'un anneau commutatif est contenu dans un idéal maximal).

**Exercice 2.** *Ultraproduit d'une famille de $\mathcal{L}$-structures*

Soient $\mathcal{L}$ un langage du premier ordre, $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{L}$-structures et $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $I$. Pour tout indice $i \in I$, l'ensemble de base de la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}_i$ est noté $M_i$.

On considère l'ensemble produit $M = \prod_{i \in I} M_i$ muni de la relation binaire $\sim$ définie par :

$$u \sim v \Leftrightarrow \{i \in I : u(i) = v(i)\} \in \mathcal{U}$$

**1.** Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur $M$.

On appelle *ultraproduit* de la famille $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ par l'ultrafiltre $\mathcal{U}$ la $\mathcal{L}$-structure $\mathcal{M}$ dont l'ensemble de base est $M = \prod_{i \in I} M_i$ et dans laquelle :
- Chaque symbole de fonction $f$ d'arité $k$ est interprété par la fonction :

$$\begin{array}{rccl} f^{\mathcal{M}} : & \mathcal{M}^k & \longrightarrow & \mathcal{M} \\ & (u_1, \dots, u_k) & \longmapsto & \left(i \mapsto f^{\mathcal{M}_i}(u_1(i), \dots, u_k(i))\right) \end{array}$$

- Chaque symbole de prédicat $P$ d'arité $k$ est interprété par :

$$(u_1, \dots, u_k) \in P^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow \left\{i \in I | (u_1(i), \dots, u_k(i)) \in P^{\mathcal{M}_i}\right\} \in \mathcal{U}$$

Dans le cas particulier où toutes les structures $\mathcal{M}_i$ sont identiques, on dit que $\mathcal{M}$ est une *ultrapuissance*.

Pour tout $i \in I$, on note $\pi_i : M \to M_i$ la projection sur la composante d'indice $i$, qui est définie par $\pi_i(u) = u(i)$. On remarquera que si $\rho$ est une valuation dans $\mathcal{M}$, alors $\pi_i \circ \rho$ est une valuation dans $\mathcal{M}_i$.

**2.** Montrer par induction sur $t$ que pour tout terme $t$, pour toute valuation $\rho$ et pour tout indice $i \in I$ on a :

$$\pi_i(t[\rho]^{\mathcal{M}}) = t[\pi_i \circ \rho]^{\mathcal{M}_i}$$

**3.** Montrer par induction sur $A$ que pour toute formule $A$, pour toute valuation $\rho$ et pour tout indice $i \in I$ on a :

$$\mathcal{M} \models A[\rho] \Leftrightarrow \{i \in I : \mathcal{M}_i \models A[\pi_i \circ \rho]\} \in \mathcal{U}$$

**4.** Soit $\mathcal{T}$ une théorie sur le langage $\mathcal{L}$.
Montrer que si $(\forall i \in I)(\mathcal{M}_i \models \mathcal{T})$ alors $\mathcal{M} \models \mathcal{T}$.
Dans le cas où $\mathcal{T}$ est une théorie égalitaire et où les modèles $\mathcal{M}_i$ sont égalitaires, comment l'égalité est-elle interprétée dans $\mathcal{M}$ ?

**5.** En déduire le théorème de compacité sur les modèles en construisant un tel modèle à l'aide d'ultrafiltres.

**Exercice 3.** *Un modèle non standard de PA*

On suppose ici que $I = \mathbb{N}$.

**1.** Montrer qu'il existe un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ contenant (au moins) toutes les parties cofinies (complémentaires de parties finies) de $\mathbb{N}$.

Soit $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ un tel ultrafiltre. On construit l'ultrapuissance $\mathcal{M}$ en prenant pour tous les $\mathcal{M}_i$ le modèle standard de PA (celui dont l'ensemble de base est $\mathbb{N}$). L'ensemble de base de $\mathcal{M}$ est l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites d'entiers, il s'agit d'après l'exercice précédent d'un modèle de PA.

On note $\mathcal{M}'$ le modèle égalitaire obtenu en effectuant le quotient de $\mathcal{M}$ par la relation d'équivalence $\sim$ (ici sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$) définie précédemment.

**2.** Quels sont les entiers standard dans le modèle $\mathcal{M}'$ ?

**3.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{Id} \not\sim \mathbf{K}_n$ dans $\mathcal{M}$, où $\mathsf{Id} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ désigne la fonction identité sur $\mathbb{N}$ et où $\mathbf{K}_n$ désigne la fonction constante égale à $n$. En déduire que le modèle $\mathcal{M}'$ est un modèle non standard de PA.

**4.** Quel est le cardinal de $\mathcal{M}'$ ?