Aufgabe 1 *(OBDDs)* (10 Punkte)

Sei $\Pi = \{P, Q\}$ eine Menge propositionaler Variablen; sei $P < Q$ eine Ordnung über Π. Geben Sie zwei Π-Formeln F und G und die reduzierten OBDDs für F, G, $F \wedge G$ und $F \vee G$ an, so daß die reduzierten OBDDs für F und G jeweils genau zwei innere Knoten und die reduzierten OBDDs für $F \wedge G$ und $F \vee G$ weniger als zwei innere Knoten besitzen. (innerer Knoten = Nicht-Blatt-Knoten)

Aufgabe 2 *(Algebren und Semantik)* (14 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ eine Signatur. Für jede Σ-Formel F ohne Gleichheit sei $\mathrm{aneg}(F)$ die Formel, die man aus F erhält, indem man jedes Atom $p(t_1, \ldots, t_n)$ in F ($p/n \in \Pi$) durch seine Negation $\neg p(t_1, \ldots, t_n)$ ersetzt. Beweisen Sie: Falls F erfüllbar ist, dann ist $\mathrm{aneg}(F)$ erfüllbar.

Aufgabe 3 *(Resolution)* (10 Punkte)

Zeigen Sie die Gültigkeit der folgenden Formel mittels des Resolutionskalküls:

$$\forall x \exists y \left(p(f(f(x)), y) \wedge \forall z \left(p(f(x), z) \rightarrow p(x, g(x, z)) \right) \right) \rightarrow \forall x \exists y\, p(x, y)$$

Aufgabe 4 *(Tableaux)* (7 + 7 = 14 Punkte)

Zeigen Sie die Erfüllbarkeit oder Unerfüllbarkeit der folgenden Formeln mittels semantischer Tableaux. (Benutzen Sie genau die Expansionsregeln aus der Vorlesung; verwenden Sie keine Abkürzungen.)

Teil (a)

$$\neg \Big((Q \vee \neg P) \rightarrow ((Q \vee P) \rightarrow Q) \Big)$$

Teil (b)

$$\Big(\neg Q \rightarrow (P \wedge R) \Big) \wedge \neg \Big((P \vee R) \rightarrow Q \Big)$$

Aufgabe 5 *(Ordnungen, Redundanz)* (4 + 3 + 7 = 14 Punkte)

Sei N die folgende Menge von Grundklauseln:

$$\neg P_3 \vee P_1 \vee P_1 \qquad (1)$$
$$\neg P_2 \vee P_1 \qquad (2)$$
$$P_4 \vee P_4 \qquad (3)$$
$$P_3 \vee \neg P_2 \qquad (4)$$
$$P_4 \vee P_3 \qquad (5)$$

Teil (a)

Sei die Atomordnung definiert durch $P_4 \succ P_3 \succ P_2 \succ P_1$. Ordnen Sie die Klauseln in N bezüglich $\succ_C$.

Teil (b)

Berechnen Sie das Kandidatenmodell $I_N^{\succ}$ für N wie in Abschnitt 2.10 der Vorlesung beschrieben.

Teil (c)

Finden Sie eine andere totale Atomordnung $\succ'$, so daß sowohl Klausel (2) als auch Klausel (5) redundant in N bezüglich $\succ'_C$ sind.

Aufgabe 6 *(Herbrand-Interpretationen)* (6 + 6 + 6 = 18 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \Pi)$ mit $\Omega = \{b/0,\ f/1\}$ und $\Pi = \{p/1\}$.

Teil (a)

Wieviele verschiedene Herbrand-Interpretationen über Σ gibt es? Erläutern Sie kurz.

Teil (b)

Wieviele verschiedene Herbrand-Modelle besitzt die Formel

$$p(f(f(b))) \ \wedge\ \forall x\ \big(p(x) \rightarrow p(f(x))\big)\,? \qquad (1)$$

Erläutern Sie kurz.

Teil (c)

Jedes Herbrand-Modell über Σ der Formel (1) ist auch ein Modell von

$$\forall x\ p(f(f(x))) \qquad (2)$$

Geben Sie ein Beispiel einer Algebra an, die ein Modell von (1) aber nicht von (2) ist.