Aufgabe 1 *(Abstrakte Reduktionssysteme)* (5 Punkte)

Zeigen Sie: Es gibt kein abstraktes Reduktionssystem $(A, \rightarrow)$ mit $A \neq \emptyset$, so daß jedes $a \in A$ mindestens zwei Normalformen hat.

Aufgabe 2 *(E-Algebren)* (4 + 4 = 8 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \emptyset)$ und $\Omega = \{a/0,\ b/0,\ c/0,\ f/1\}$; sei E die Menge der (implizit allquantifizierten) Gleichungen $\{\, a \approx f(b),\ f(f(x)) \approx f(f(y))\,\}$.

Teil (a)

Geben Sie eine mögliche Herleitung der Aussage $E \vdash f(a) \approx f(f(f(z)))$ an.

Teil (b)

Ist das Universum der initialen E-Algebra $\mathrm{T}_\Sigma(\emptyset)/E$ endlich oder unendlich? Falls es endlich ist, wieviele Elemente hat es?

Aufgabe 3 *(Rewrite-Ordnungen)* (6 Punkte)

Sei $\mathcal{A}$ eine Σ-Algebra; sei $>_1$ eine strikte partielle Ordnung auf ihrem Universum, so daß die Interpretation $f_\mathcal{A}$ jedes Funktionssymbols f monoton bezüglich $>_1$ ist. Sei $>_2$ eine strikte partielle Ordnung auf $\mathrm{T}_\Sigma(X)$, die kompatibel mit Σ-Operationen ist.
Definieren Sie die Ordnung $>_{12}$ über $\mathrm{T}_\Sigma(X)$ durch

$$\begin{array}{lll} s >_{12} t & \Leftrightarrow & \mathcal{A}(\alpha)(s) >_1 \mathcal{A}(\alpha)(t) \text{ für alle } \alpha : X \rightarrow U_\mathcal{A} \\ & & \text{oder } \mathcal{A}(\alpha)(s) \geq_1 \mathcal{A}(\alpha)(t) \text{ für alle } \alpha : X \rightarrow U_\mathcal{A} \text{ und } s >_2 t. \end{array}$$

Zeigen Sie, daß $>_{12}$ kompatibel mit Σ-Operationen ist.

Aufgabe 4 *(Lexikographische Pfadordnungen)* (6 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \emptyset)$ und $\Omega = \{f/1,\ g/1,\ h/2,\ k/1\}$; sei R das folgende Termersetzungssystem:

$$\begin{aligned} h(y, f(x)) &\rightarrow h(k(x), x), \\ k(g(x)) &\rightarrow f(x), \\ k(k(x)) &\rightarrow h(x, x) \end{aligned}$$

Geben Sie eine Präzedenz $>$ auf Ω an, so daß $\rightarrow_R \subseteq >_{\text{lpo}}$ gilt, wobei das Funktionssymbol h lexikographischen Status von links nach rechts hat.

Aufgabe 5 *(Kritische Paare)* (7 Punkte)

Sei R das folgende Termersetzungssystem:

$$\begin{aligned} g(f(x,x)) &\rightarrow g(x), \\ f(g(y),g(a)) &\rightarrow b, \\ a &\rightarrow f(b,b) \end{aligned}$$

Berechnen Sie alle kritischen Paare zwischen Regeln in R und überprüfen Sie, ob diese zusammenführbar („joinable") in R sind.

Aufgabe 6 *(Superpositionskalkül)* (6 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel einer Signatur Σ, einer Reduktionsordnung $>$, die total auf Σ-Grundtermen ist, und einer Menge N von zwei Grundklauseln, die folgende Bedingungen erfüllen:

– $R_\infty \neq \emptyset$,

– alle Klauseln in N sind wahr in R_∞, und

– N ist nicht bis auf Redundanz saturiert.