Quartiken als Summe von Potenzen in $\mathbb{P}^3$

Michael Sagraloff

Diplomarbeit
am mathematischen Institut
der Universität Bayreuth

Betreut durch
Prof. Dr. Frank-Olaf-Schreyer
28.September 2002

Zusammenfassung

Wir betrachten eine homogene Form f vierten Grades in 4 Variablen und deren Darstellung $f = l_1^4 + ... + l_s^4$ als Summe von s Potenzen von Linearformen. Für *allgemeine* f geben wir das kleinstmögliche s an und bestimmen die lokale Geometrie aller Darstellungen von f, welche eine 5-dimensionale Familie bilden.
Für *allgemeine* f ist $s = 10$ ausreichend und kleinstmöglich. Bei gegebenem l_1, l_2 gibt es genau zwei verschiedene Kollektionen $\Sigma_1 = \{\bar{l}_1, ..., \bar{l}_8\}$ bzw. $\Sigma_2 = \{\tilde{l}_1, ..., \tilde{l}_8\}$ von jeweils 8 Linearformen, die zusammen mit l_1, l_2 eine Darstellung von f wie oben liefern.
Aus der minimal freien Auflösung des durch $\tilde{F} = V(\tilde{f}) \subset \mathbb{P}^3$ definierten *apolaren Artinschen Gorensteinrings* $A^{\tilde{F}}$, $\tilde{f} = f - l_1^4 - l_2^4$, erhalten wir die notwendigen Informationen über die Geometrie der Lösungen, um für gegebenes f und l_1, l_2 die beiden Kollektionen Σ_1 und Σ_2 zu konstruieren.

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der Darstellung von *allgemeinen* homogenen Formen d-ten Grades in $n+1$ Variablen als Summe von Potenzen von Linearformen l_i, d.h.

$$(*) \qquad f = l_1^d + ... + l_s^d,$$

Für einen minimal möglichen Wert $s(n,d)$ für s, welcher eine solche Darstellung zuläßt, lassen sich folgende Abschätzungen angeben (Lemma 0.3. und 0.5):

$$\binom{n+d}{d} \geqslant s(n,d) \geqslant \lceil \tfrac{1}{n+1}\binom{n+d}{d} \rceil$$

Bis auf einige Ausnahmen für (n,d) gilt sogar $s(n,d) = \lceil \frac{1}{n+1}\binom{n+d}{d} \rceil$. Dieses Ergebnis wurde in den Arbeiten von Alexander und Hirschowitz ([Alexander Hirschowitz]) bewiesen:

0.1. Satz (Alexander-Hirschowitz). *Eine allgemeine* homogene Form f vom Grad d in $n+1$ Variablen ist darstellbar als Summe von Potenzen von $\lceil \frac{1}{n+1}\binom{n+d}{d} \rceil$ Linearformen, bis auf folgende Ausnahmen:*

$d = 2$ *mit* $s(n,d) = n+1$, *oder*
$d = 4$ *und* $n = 2, 3, 4$ *mit* $s(n,d) = 6, 10, 15$, *oder*
$d = 3$ *und* $n = 4$ *mit* $s(n,d) = 8$

(*allgemein bedeutet: es existiert in jedem der betrachteten Fälle (n,d) eine nicht leere Zariski-offene Menge U, so daß für alle $f \in U$ die jeweilige Behauptung des Satzes gilt).

Hierbei werden jedoch nur *allgemeine* homogene Formen f betrachtet. Für *spezielle* f kann der für s minimale Wert sowohl kleiner als auch größer werden. So ist bis jetzt auch allgemein keine kleinste obere Schranke $\widetilde{s}(n,d)$ bekannt, für die gilt, daß *jede* homogene Form vom Grad d in $n+1$ Variablen als Summe von weniger als $\widetilde{s}(n,d)+1$ Potenzen von Linearformen geschrieben werden kann. Ebenso ist die Eindeutigkeit der Darstellung bzw. die Geometrie möglicher Darstellungen bisher nur in einigen Fällen bekannt ([Ranestad, Schreyer]).

In dieser Arbeit studieren wir den Ausnahmefall $(n,d) = (3,4)$.

Im folgenden geben wir für *allgemeines* f eine vollständige Beschreibung, wie sich f als Summe von $s(3,4) = 10$ Potenzen darstellen läßt.

Dabei orientieren wir uns an der heuristischen Vorgehensweise Reyes ([Reye 1,2 und 3], 1874). Auf der Basis schnittheoretischer Ergebnisse ([Fulton]) können wir in Verbindung mit computeralgebraischen Berechnungen (Macaulay2) und Halbstetigkeitsargumenten die Ergebnisse Reyes beweisen.

Der Beweis erlaubt es uns zusätzlich, genaue Aussagen über die Art und die Anzahl der möglichen Darstellungen zu treffen (Hauptsatz 0.7.) : Sind mit l_1, l_2 zwei der 10 benötigten Linearformen vorgegeben, so gibt es genau 2 verschiedene Kollektionen $\Sigma_1 = \{\bar{l}_1, ..., \bar{l}_8\}$ bzw. $\Sigma_2 = \{\tilde{l}_1, ..., \tilde{l}_8\}$ von jeweils 8 Linearformen, die zusammen mit l_1, l_2 eine Darstellung von f wie in (*) liefern. (Reye hatte vermutet, daß durch Angabe von l_1, l_2 die Darstellung von f eindeutig sei.)

In den Kapiteln 3 und 4 geben wir erstmals ein Konstruktionsverfahren an, daß bei gegebenem f und l_1, l_2 die beiden Kollektionen der restlichen 8 Linearformen liefert (Satz 0.10.). Die dafür benötigte Information über die Geometrie der Lösungen erhalten wir aus der minimal freien Auflösung des durch $\tilde{F} = V(\tilde{f}) \subset \mathbb{P}^3$, $\tilde{f} = f - l_1^4 - l_2^4$, bestimmten *apolaren Artinschen Gorensteinrings* $A^{\tilde{F}}$ (zur Definition siehe Kapitel 1) **:**

Identifizieren wir die Linearformen $\bar{l}_i, \tilde{l}_i$, $i = 1, ..., 8$, mit Punkten $\bar{p}_i$ bzw. $\tilde{p}_i$ im Dualraum $\check{\mathbb{P}}^3$, so liegen die Punktmengen $\bar{\Gamma} = \{\bar{p}_i\}_i$ und $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{p}_i\}_i$ auf einer durch f und l_1, l_2 bestimmten elliptischen Kurve $E \subset \check{\mathbb{P}}^3$. Es gibt dann eine elliptische Kurve $\tilde{E} \subset \mathbb{P}^7$ vom Grad 12 und einen Isomorphismus $\delta : E \to \tilde{E}$. $\tilde{E}$ liegt auf einer Regelfläche $X \subset \mathbb{P}^7$ über E und die beiden Punktemengen $\delta(\bar{\Gamma})$, $\delta(\tilde{\Gamma})$ jeweils auf einem Schnitt vom Grad 4 von X.

0.2. Sei $f \in \Bbbk[x_0, ..., x_n]_d$, $n \in \mathbb{N}$, eine homogene Form vom Grad $d \in \mathbb{N}$ über einem algebraisch abgeschlossenem Körper $\Bbbk$ mit char $\Bbbk \nmid d!$. f kann dann für hinreichend große $s \in \mathbb{N}$ als Summe von d-ten Potenzen von Linearformen $l_i \in \Bbbk[x_{0,...,}x_n]_1$, $i = 1, ..., s$, geschrieben werden:

$$f = l_1^d + ... + l_s^d$$

Denn identifizieren wir die Abbildung $l \to l^d$ für $l \in \Bbbk[x_0, ..., x_3]_1$ mit der d-ten Veronese Einbettung $\mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{P}^{N_d}$, wobei $N_d = \binom{n+d}{d} - 1$, so wird $\mathbb{P}^{N_d}$ vom Bild dieser Abbildung erzeugt. Für eine beliebige homogene Form f wie oben und $N_d + 1$ allgemein vorgegebenen Linearformen $l_1, ..., l_{N_d+1}$ können wir also Skalare $\lambda_1, ..., \lambda_{N_d+1} \in \Bbbk$ finden, so daß

$$f = \lambda_1 l_1^d + ... + \lambda_{N_d+1} l_{N_d+1}^d = \widetilde{l}_1^d + ... + \widetilde{l}_{N_d+1}^d$$

wobei sich $\widetilde{l_i}$ als Produkt einer d-ten Wurzel von λ_i mit l_i ergibt. Identifizieren wir die durch eine Linearform $l \in \Bbbk[x_{0,...,}x_n]_1$ gegebene Hyperfläche $V(l) \subset \mathbb{P}^n$ mit dem entsprechenden Punkt $p = V(l) \in \check{\mathbb{P}}^n$ im Dualraum, so erhalten wir folgendes Ergebnis:

0.3. Lemma. *Für eine beliebige homogene Form* $f \in \Bbbk[x_0, ..., x_n]_d$ *und* $N_d + 1 = \binom{n+d}{d}$ *vorgegebene Punkte* $p_1, ..., p_{N_d+1} \in \check{\mathbb{P}}^n$ *in allgemeiner Lage lassen sich Linearformen* $l_i \in \Bbbk[x_{0,...,}x_n]_1$, $i = 1, ..., N_d + 1$ *angeben, so daß* $V(l_i) = p_i$ *für alle* $l_i \neq 0$ *und*

$$f = l_1^d + ... + l_{N_d+1}^d$$

0.4. Beispiel. *Für* f *, eine beliebige homogene Form 4-ten Grades in 4 Variablen*, und *35 Punkte* $p_1, ..., p_{35} \in \check{\mathbb{P}}^3$ *in allgemeiner Lage lassen sich Linearformen* $l_i \in \Bbbk[x_{0,...,}x_3]_1$, $i = 1, ...,35$ *angeben, so daß* $V(l_i) = p_i$ *für alle* $l_i \neq 0$ *und*

$$f = l_1^4 + ... + l_{35}^4$$

Im Folgenden richtet sich unser Interesse auf den kleinstmöglichen Wert $s(n, d)$, den s in (*) für allgemeines f annehmen kann. Setzen wir in einer solchen Darstellung $l_i = a_0^{(i)} x_0 + ... + a_n^{(i)} x_n$ mit $a_j^{(i)} \in \Bbbk$, $i = 1, ..., s$ und $j = 0, 1, ..., n$, so ist $l_1^4 + ... + l_s^4$ von den $s(n+1)$ Koeffizienten $a_j^{(i)}$ abhängig, wohingegen f durch genau $\binom{n+d}{d}$ Parameter bestimmt ist. Wir erhalten demnach folgende Abschätzung für $s(n, d)$:

0.5. Lemma. *Für eine allgemeines $f \in \Bbbk[x_0, ..., x_n]_d$ ist*

$$s(n,d) \geqslant \lceil \tfrac{1}{n+1}\tbinom{n+d}{d} \rceil$$

Wie bereits in Satz 0.1. erwähnt gilt bis auf einige Ausnahmen für (n,d) auch $s(n,d) = \lceil \frac{1}{n+1}\binom{n+d}{d} \rceil$. Daß der in dieser Arbeit betrachtete Fall $(n,d) = (3,4)$ ein solcher Ausnahmefall ist, zeigt der folgende Satz:

0.6. Satz. *Für f , eine allgemeine homogene Form 4-ten Grades in 4 Variablen, benötigt man mindestens **10** Linearformen $l_1, ..., l_{10} \in \Bbbk[x_0, ..., x_n]_1$ für eine Darstellung wie in (*), wohingegen $9 = \lceil \frac{1}{4}\binom{7}{4} \rceil$ Linearformen nicht ausreichend sind. Es gilt also: $s(3,4) = 10$.*

Des weiteren stellt sich die Frage, welche Punktemengen $\Gamma = \{p_1, ..., p_{10}\} \subset \check{\mathbb{P}}^3$ überhaupt eine Darstellung $f = l_1^4 + ... + l_{10}^4$ mit $p_i = V(l_i) \in \check{\mathbb{P}}^3$ zulassen. Der folgende Satz liefert uns eine vollständige Antwort auf diese Frage:

0.7. Hauptsatz. a) *Sei f eine allgemeine homogene Form vom Grad 4 in 4 Variablen, $p_1 \in \check{\mathbb{P}}^3$ ein allgemeiner Punkt und p_2 ein willkürlich gewählter allgemeiner Punkt auf der zu f bezüglich p_1 apolaren Quadrik $Q_{p_1} \subset \check{\mathbb{P}}^3$ (zum Begriff der Apolarität siehe Kapitel 1). Der Schnitt der zu f bezüglich p_1 bzw. p_2 apolaren Quadriken Q_{p_1} bzw. Q_{p_2} ist dann eine glatte elliptische Kurve E vom Grad 4.*

b) *Es existieren dann genau zwei paarweise verschiedene Punktmengen $\Gamma_1 = \{\bar{p}_3, ..., \bar{p}_8\}$, $\Gamma_2 = \{\tilde{p}_3, ..., \tilde{p}_{10}\}$ und Linearformen $l_1, l_2, \bar{l}_1, ..., \bar{l}_8, \tilde{l}_1, ..., \tilde{l}_8$, so daß $f = l_1^4 + l_2^4 + \bar{l}_1^4 ... + \bar{l}_8^4 = l_1^4 + l_2^4 + \tilde{l}_1^4 + ... + \tilde{l}_8^4$ mit $p_i = V(l_i) \in \check{\mathbb{P}}^3$ für $i = 1,2$ und $\bar{p}_j = V(\bar{l}_j) \in \check{\mathbb{P}}^3$* bzw. *$\tilde{p}_j = V(\tilde{l}_j) \in \check{\mathbb{P}}^3$ für $j = 1, ..., 8$. Zudem erhalten wir, daß Γ_1, $\Gamma_2 \subset E$ und die Linearformen l_i, $\bar{l}_j, \tilde{l}_j$ bis auf 4-te Einheitswurzeln eindeutig bestimmt sind.*

Hieraus kann man direkt folgern:

0.8. Satz. *Seien l_i, $i = 1, ..., 8$, Linearformen mit Punkten $p_i = V(l_i) \in \check{\mathbb{P}}^3$ in allgemeiner Lage vorgegeben und $f = l_1^4 + ... + l_8^4$. Dann gibt es noch genau eine zweite, von der ersten verschiedene Darstellung $f = \tilde{l}_1^4 + ... + \tilde{l}_8^4$, $\tilde{l}_i \in \Bbbk[x_0, ..., x_3]_1$, wobei die Punkte $p_i = V(l_i) \in \check{\mathbb{P}}^3$ und $\tilde{p}_i = V(\tilde{l}_i) \in \check{\mathbb{P}}^3$ alle auf dem Schnitt der beiden zu f apolaren Quadriken liegen.*

0.9. Beispiel. In einem konkreten Beispiel für f als Summe von 8 Potenzen:

$$\begin{aligned} f = {} & (w+x+y)^4 + (w+x+z)^4 + (w+x+y+z)^4 + (w+y+z)^4 + \\ & +(w-x-y)^4 + (w-y-z)^4 + (w-x-z)^4 + (w-1.5x-y-z)^4 \end{aligned}$$

können wir anhand unseres Konstruktionsverfahrens (Satz 0.10.) die zweite Darstellung von f numerisch genähert angeben:

$$\begin{aligned} f \approx {} & (0.952\,142\,210\,8w + 1.\,245\,348\,113x + 0.952\,142\,210\,8y + 0.952\,142\,210\,8z)^4 + \\ & + (0.965\,964\,132\,1w + 0.07\,004\,997\,605x - 0.965\,964\,132\,1y - 0.965\,964\,132\,1z)^4 + \\ & + (0.986\,775\,251\,6w - 1.\,249\,647\,982x - 0.986\,775\,251\,6y - 0.986\,775\,251\,6z)^4 + \\ & + (0.989\,853\,633\,6w - 1.\,206\,844\,197x - 1.\,056\,446\,008y - 0.150\,398\,189\,6z)^4 + \\ & + (0.989\,853\,634\,3w - 1.\,206\,844\,198x - 0.150\,398\,189\,7y - 1.\,056\,446\,009z)^4 + \\ & + (1.\,018\,965\,318w + 0.835\,755\,373\,2x - 0.118\,675\,683\,9y + 0.954\,431\,057\,2z)^4 + \\ & + (1.\,018\,965\,318w + 0.835\,755\,373\,3x + 0.954\,431\,057\,2y - 0.118\,675\,683\,9z)^4 + \\ & + (1.\,064\,319\,304w + 0.112\,096\,146\,7x + 1.\,064\,319\,304y + 1.\,064\,319\,304z)^4 \end{aligned}$$

Die Abweichung der jeweiligen Koeffizienten von f und der oben angegebenen Näherung liegt etwa im Bereich von 10^{-7}. Eine exakte Angabe der Koeffizienten als algebraische Zahlen wäre in diesem Fall auch möglich, allerdings wären die Ausdrücke viel zu umfangreich.

Ist $f = l_1^4 + ... + l_8^4$ wie in Satz 0.8. vorgegeben, so lassen sich die Verschwindungsideale I_{Γ_1}, I_{Γ_2} der beiden Punktemenge $\Gamma_1 = \{p_1, ..., p_8\} \subset \check{\mathbb{P}}^3$ bzw. $\Gamma_2 = \{\tilde{p}_1, ..., \tilde{p}_8\} \subset \check{\mathbb{P}}^3$. angeben. Hierzu wird entscheidend Gebrauch von der geometrischen Lage von Γ_1 und Γ_2 gemacht:

0.10. Satz. *Seien die Voraussetzungen wie in Satz 0.8 gegeben und $\Gamma_1 = \{p_1, ..., p_8\} \subset \check{\mathbb{P}}^3$ bzw. $\Gamma_2 = \{\tilde{p}_1, ..., \tilde{p}_8\} \subset \check{\mathbb{P}}^3$. Γ_1 und Γ_2 liegen dann auf einer elliptischen Kurve E vom Grad 4, dem Schnitt der beiden zu f apolaren Quadriken. Es existiert dann eine elliptische Kurve $\tilde{E} \subset \mathbb{P}^7$ vom Grad 12 und ein Isomorphismus $\delta : E \to \tilde{E}$. Weiter läßt sich eine Regelfläche X über E angeben, die $\tilde{E}$ enthält, sowie zwei lineare disjunkte Unterräume L_1, $L_2 \cong \mathbb{P}^3$ in $\mathbb{P}^7$ mit folgenden Eigenschaften:*

(1) $L_1 \cap \tilde{E} = \delta(\Gamma_1)$ und $L_2 \cap \tilde{E} = \delta(\Gamma_2)$

(2) Mit $\pi_1 : \tilde{E} \to E_2 \subset L_2$ bzw. $\pi_2 : \tilde{E} \to E_1 \subset L_1$ seien die Projektionen von L_1 auf L_2 bzw. von L_2 auf L_1 bezeichnet. $\tilde{E}$ wird dann vermöge

π_1 bzw. π_2 auf die elliptische Kurve E_1 bzw. E_2 isomorph abgebildet. E_1 und E_2 sind dann jeweils Schnitte von X vom Grad 4.

(3) $\mathcal{L}_1 = \pi_1^* \mathcal{O}_{L_2}(1)$ und $\mathcal{L}_2 = \pi_2^* \mathcal{O}_{L_1}(1)$ sind zwei invertierbare Garben auf $\tilde{E}$ mit $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2)$. X ist durch $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2)}(1)|$ in $\mathbb{P}^7$ projektiv normal eingebettet und der homogene Koordinatenring R_X von X, $R = \mathbb{k}[y_0, ..., y_7]$ der homogene Koordinatenring von $\mathbb{P}^7$, hat minimal freie Auflösung $\mathbf{F}_{R_X}$

$$\mathbf{F}_{R_X}: \qquad 0 \to R\,(-8) \xrightarrow{\vartheta_6} R^8(-7) \xrightarrow{\vartheta_5} R^{20}(-6) \xrightarrow{\vartheta_4} R^{12}(-4) \oplus R^{16}(-5) \xrightarrow{\vartheta_3}$$

$$\xrightarrow{\vartheta_3} R^{24}(-3) \oplus R^2(-4) \xrightarrow{\vartheta_2} R^{12}(-2) \xrightarrow{\vartheta_1} R \to R_X \to 0$$

(4) Sei $\tilde{\vartheta}_3 : R^{16}(-5) \to R^2(-4)$ die Beschränkung der in $\mathbf{F}_{R_X}$ auftretenden Abbildung $\vartheta_3 : R^{12}(-4) \oplus R^{16}(-5) \to R^{24}(-3) \oplus R^2(-4)$. Dann gilt:

$$V(\text{ann coker } \tilde{\vartheta}_3) = L_1 \cup L_2$$

Notation. Fortan bezeichne $\mathbb{k}$ einen algebraisch abgeschlossenen Körper mit char $\mathbb{k} = 0$ und S den homogenen Koordinatenring $\mathbb{k}[x_0, ..., x_n]$ des $\mathbb{P}^n$ bzw. $T = \mathbb{k}[\partial_0, ..., \partial_n]$ den homogenen Koordinatenring des $\check{\mathbb{P}}^n$. Des weiteren wird Gebrauch vom Syzygientableau eines graduierten S-Moduls M gemacht: Sei also $0 \leftarrow M \leftarrow F_0 \leftarrow F_1 \leftarrow ... \leftarrow F_n \leftarrow 0$ eine minimale freie Auflösung von M mit $F_i = \oplus S^{\beta_{ij}}(-j)$, dann schreiben wir das Syzygientableau von M in der Form:

$$\begin{array}{cccccc}
\beta_{00} & \beta_{11} & \beta_{22} & \cdot & \cdot\;\cdot & \beta n, n \\
\beta_{01} & \beta_{12} & \beta_{23} & \cdot & \cdot\;\cdot & \beta_{n,n+1} \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot & \cdot \\
\beta_{0m} & \beta_{1,m+1} & \beta_{2,m+1} & \cdot & \cdot\;\cdot & \beta_{n,n+m}
\end{array}$$

Dabei bezeichne m die Castelnuovo-Mumford Regularität von M. Für alle Bettizahlen $\beta_{ij} = 0$ schreiben wir kürzer ein "-". Für graduierte T-Moduln gelte entsprechendes.

So nimmt beispielsweise das Syzygientableau einer twisted cubic in $\mathbb{P}^3$ die folgende Gestalt an:

$$\begin{array}{ccc} 1 & - & - \\ - & 3 & 2 \end{array}$$

Das Verschwindungsideal der twisted cubic hat also drei quadratische Erzeuger, welche 2 linearen Relationen gehorchen.

Mit dieser Notation hat die Auflösung $\mathbf{F}_{R_X}$ aus Satz 0.10.(3) folgendes Syzygientableau:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & - & - & - & - & - & - \\ - & 12 & 24 & 12 & - & - & - \\ - & - & 2 & 16 & 20 & 8 & 1 \end{array}$$

Sei R ein Ring, M ein endlich erzeugtes R-Modul und

$$R^m \xrightarrow{\varphi} R^n \to M \to 0$$

eine Darstellung von M. Bei gewählten Basen in R^m und R^n läßt sich φ durch eine $n \times m$ Matrix A mit homogenen Einträgen in R darstellen. Für $0 < k \leq \min(m, n)$ bezeichne dann $I_k(\varphi)$ bzw. $I_k(A)$ das Ideal, welches durch die $k \times k$ Minoren von A erzeugt wird. $I(\varphi) = I(A) := I_{rank\varphi}(\varphi)$ ist dann unabhängig von der obigen Darstellung.

1. Apolarität

Im folgenden Kapitel führen wir eine Reihe von häufig benutzten Begriffen und Notationen ein, von denen wir vor allem in Kapitel 2 des öfteren Gebrauch machen werden. Der Begriff der Apolarität wurde bereits, wenn auch in etwas anderer Weise, von Reye ([Reye 1]) eingeführt und spielt eine zentrale Rolle in der Betrachtung von Darstellungen von allgemeinen homogenen Polynomen als Summe von Potenzen von Linearformen.

Sei $S = \mathbb{k}[x_0, ..., x_n]$ und $T = \mathbb{k}[\partial_0, ..., \partial_n]$. T operiert auf S durch Differentation:

$$\partial^\alpha(x^\beta) = \alpha!\tbinom{\beta}{\alpha}x^{\beta-\alpha}$$

wenn $\beta \geq \alpha$ und 0 sonst. α und β bezeichnen hier Multiindizes und $\binom{\beta}{\alpha} = \prod \binom{\beta_i}{\alpha_i}$. Den allgemeinen Fall erhalten wir durch lineare Fortsetzung. Ebenso operiert auch S auf T, indem wir diese Operation auf den Erzeugenden wie folgt definieren:

$$x^\beta(\partial^\alpha) = \beta!\tbinom{\alpha}{\beta}\partial^{\alpha-\beta}$$

Die Polare einer Form $f \in S$ in einem Punkt $a = (a_0 : ... : a_n) \in \mathbb{P}^n$ ist dann durch $P_a(f)$ mit $P_a = \sum a_i \partial_i \in T$ gegeben.

Mit obigen Notation ergeben sich demnach die folgenden Ergebnisse:

1.0. Lemma u. Definition.

(a) $P_a^d(f) = f(P_a^d) = d!f(a)$ *mit* $f \in \mathbb{k}[x_0, ..., x_n]_d$, $d \in \mathbb{N}$

(b) $f(P_a^m) = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0$ *für alle natürlichen Zahlen* $m \geq d$ *.*

Wir sagen dann, daß zwei homogene Formen $f \in S$ *und* $D \in T$ *apolar sind, wenn* $f(D) = D(f) = 0$.

Beweis. (a) Es reicht die Behauptung für ein Erzeugendensystem von S zu zeigen. Sei also $f = x_0^{\mu_0}...x_n^{\mu_n}$, $\mu_i \in \Bbbk$ für $i = 0, ..., n$ und $\sum \mu_i = d$. Dann gilt:

$$P_a^d(f) = \left(\sum a_i \partial_i\right)^d (f) = \left(\tfrac{d!}{\mu_0!...\mu_n!} (a_0\partial_0)^{\mu_0} ... (a_n\partial_n)^{\mu_n}\right) (x_0^{\mu_0}...x_n^{\mu_n}) =$$

$$= (x_0^{\mu_0}...x_n^{\mu_n}) \left(P_a^d\right) = d! a_0^{\mu_0}...a_n^{\mu_n} = d! f(a)$$

$$\text{(b)} \quad f(a) = 0 \Leftrightarrow \tilde{f} f(a) = 0 \ \forall \tilde{f} \in \Bbbk[x_0, ..., x_n]_{m-d} \overset{wegen\ (a)}{\Longleftrightarrow}$$

$$\Longleftrightarrow \tilde{f}(f(P_a^m)) = 0 \ \forall \tilde{f} \in \Bbbk[x_0, ..., x_n]_{m-d} \Longleftrightarrow f(P_a^m) = 0$$

□

1.1. Definition und Lemma. *Sei f eine homogene Form vom Grad d in n+1 Variablen und* $F = V(f) \subset \mathbb{P}^n$, *dann definiere*

$$F^\perp = f^\perp = \{D \in T : D(f) = 0\}$$

und $A^F = T/F^\perp$. A^F *ist dann ein 0-dimensionaler Gorensteinring mit Sockel im Grad d.*

Beweis. Wegen $P_a(D(f)) = 0 \ \forall P_a \in T_1 \Longleftrightarrow D(f) = 0$ oder $D \in T_d$ hat A^F eindimensionalen Sockel. A^F ist demnach ein 0-dimensionaler Gorensteinring mit Sockel im Grad d (siehe auch [Eisenbud] Ex. 21.7).□

Fortan identifizieren wir S bzw. T mit dem homogenen Koordinatenring von $\mathbb{P}^n$ bzw. $\check{\mathbb{P}}^n$ und $F = V(f) \subset \mathbb{P}^n$ sei eine Hyperfläche vom Grad d.

1.2. Definition.

Eine Unterschema $\Gamma \subset \check{\mathbb{P}}^n$ *nennen wir apolar zu* $f :\Longleftrightarrow I_\Gamma \subset f^\perp \subset T$.

1.3. Lemma. *Sei $\Gamma = \{p_1, ..., p_s\} \subset \check{\mathbb{P}}^n$ eine Kollektion von Hyperflächen in $\mathbb{P}^n$ bzw. $p_i = V(l_i) \in \check{\mathbb{P}}^n$ mit $l_i \in \mathbb{k}[x_0, ..., x_n]_1$ für $i = 1, ..., s$ und $f \in \mathbb{k}[x_0, ..., x_n]_d$, $F = V(f) \subset \mathbb{P}^n$. Dann gilt:*

$$\Gamma \textit{ ist apolar zu } F \Longleftrightarrow \exists \lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathbb{k} : f = \lambda_1 l_1^d + ... + \lambda_s l_s^d \ .$$

Beweis. "$\Rightarrow$" : Ein Element $\{D \to D(g)\} \in Hom(T_d, \mathbb{k}) \cong S_d$, $g \in S_d$, liegt in $Hom(R_d, \mathbb{k})$, $R = T/I_\Gamma$, genau dann, wenn $D(g) = 0$ für alle $D \in (I_\Gamma)_d$. Für $D \in T_d$ sind durch $D(l_i^d) = 0 \ \forall i$, je nach Lage der Punkte p_i, $k \leq s$ linear unabhängige Bedingungen an die Koeffizienten von D gestellt, also ist $\dim R_d = k \leq s$. Andererseits erzeugen $\{D \to D(l_i^d)\} \in Hom(R_d, \mathbb{k})$ einen k-dimensionalen Untervektorraum von $Hom(R_d, \mathbb{k})$, woraus wir $Hom(R_d, \mathbb{k}) = \langle\{D \to D(l_i^d)\}\rangle_i$ schließen. Da Γ apolar zu F vorausgesetzt war, haben wir $(0) \subset I_\Gamma \subset F^\perp$. Dies induziert die Inklusion

$$\mathbb{k} \cong Hom(A_d^F, \mathbb{k}) \subset Hom(R_d, \mathbb{k}) \subset Hom(T_d, \mathbb{k}) \cong S_d$$

die $1 \in \mathbb{k}$ auf $f \in S_d$ abbildet. Es gilt demnach: $D(f) = \lambda_1 D(l_1^d) + ... + \lambda_s D(l_s^d) = D(\lambda_1 l_1^d + ... + \lambda_s l_s^d)$ für geeignete $\lambda_1, ..., \lambda_s \in \mathbb{k}$ und folglich $f = \lambda_1 l_1^d + ... + \lambda_s l_s^d$.

"$\Leftarrow$" : $f = \sum \lambda_i l_i^d \overset{\text{Lemma 1.0.}}{\Rightarrow} g(l_i^d) = 0$ für $g \in I_\Gamma$, $i = 1, ..., s \Rightarrow I_\Gamma \subset F^\perp$.$\square$

2. Quartiken als Summe von Potenzen

In diesem Kapitel werden wir den eingangs formulierten Hauptsatz beweisen. Analog zur Vorgehensweise Reyes ([Reye 3]) zeigen wir, daß jedes allgemeine homogene Polynom f vierten Grades in 4 Variablen als Summe von 10, und nicht weniger, 4-ten Potenzen von Linearformen geschrieben werden kann. Darüber hinaus geben wir eine Anleitung, wie *alle* solche Linearformen zu bestimmen sind. Dabei ist es oft notwendig die von Reye gegebenen Aussagen, welche häufig eher Vermutungen als exakte Beweise darstellen, mit Hilfe schnittheoretischer Ergebnisse mathematisch genau zu formulieren und zu bestätigen. Um die Schnittmultiplizitäten zu bestimmen, mußten wir dazu Gebrauch von computeralgebraischen Berechnungen in einem Beispiel für f verwenden, um dann mit Hilfe von Halbstetigkeitsargumenten Aussagen für den allgemeinen Fall treffen zu können (2.1.4.). Schließlich erhalten wir ein Ergebnis (Hauptsatz 2.1.), daß in der Anzahl der Darstellungen von f von Reye nicht erwartet worden war ([Reye 3] S.129).

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, kann bis auf wenige Ausnahmen für (n, d) ein allgemeines $f \in \Bbbk[x_0, ..., x_n]_d$ als Summe von $\lceil \frac{1}{n+1}\binom{n+d}{d} \rceil$ d-ten Potenzen von Linearformen dargestellt werden. Der Fall $(n, d) = (3, 4)$ stellt eine solche Ausnahme dar. So zeigt der folgende Satz, daß $s(3, 4) > \lceil \frac{1}{4}\binom{7}{4} \rceil = 9$:

2.0. Satz. *Eine allgemeine homogene Form f vom Grad 4 in 4 Variablen läßt sich nicht als Summe von **9** vierten Potenzen von Linearformen schreiben.*

Beweis. Angenommen, es gäbe eine Darstellung $f = \lambda_1 l_1^4 + ... + \lambda_9 l_9^4$, dann könnte man eine quadratische Form $D \in T = \Bbbk[\partial_0, ..., \partial_3]_2$ angeben mit $D \in I_\Gamma \subset A^F$, wobei $\Gamma = \{p_1, ..., p_9\} \subset \check{\mathbb{P}}^3$, $p_i = V(l_i)$ für $i = 1, ..., 9$ und $F = V(f)$. Sei $D = a_{00}\partial_0^2 + a_{01}\partial_0\partial_1 + ... + a_{33}\partial_3^2 = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \partial^\alpha$ und $f = \sum_{|\beta|=4} c_\beta x^\beta$ mit Multiindizes α, β.
$D(f) = 0$ ist dann äquivalent zu einem linearen Gleichungssystem in den Variablen a_{ij} :

$$D(f) = 0 \Longleftrightarrow (\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \partial^\alpha)(\sum_{|\beta|=4} c_\beta x^\beta) = 0$$

$$\iff \sum_{|\alpha|=2,\ |\beta|=4} a_\alpha c_\beta \alpha! \binom{\beta}{\alpha} x^{\beta-\alpha} = 0$$

$$\iff \sum_{|\beta|=2} \Big(\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha c_{\alpha+\beta} \alpha! \binom{\alpha+\beta}{\alpha} \Big)\ x^\beta = 0\ ,$$

$$\iff \sum_{\substack{k,l=0,\ldots,3\\ k\leq l}} \Big(\sum_{\substack{i,j=0,\ldots,3\\ i\leq j}} a_{\gamma_{ij}} c_{\gamma_{ij}+\gamma_{kl}} \gamma_{ij}! \binom{\gamma_{ij}+\gamma_{kl}}{\gamma_{ij}} \Big)\ x^{\gamma_{kl}} = 0 \quad ,$$

wobei mit γ_{kl} der Multiindize mit $x^{\gamma_{kl}} = x_k x_l$ bezeichnet werde. Mit $A_{ijkl} := c_{\gamma_{ij}+\gamma_{kl}} \gamma_{ij}! \binom{\gamma_{ij}+\gamma_{kl}}{\gamma_{ij}}$ ist $D(f) = 0$ äquivalent zu

$$\sum_{\substack{k,l=0,\ldots,3\\ k\leq l}} A_{ijkl} a_{ij} = 0\ \forall k, l = 0, ..., 3 \text{ mit } k \leq l$$

$$\iff \begin{pmatrix} A_{0000} & A_{0100} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{3300} \\ A_{0001} & A_{0101} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{3301} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{0033} & A_{0133} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{3333} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} \\ a_{01} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{33} \end{pmatrix} = 0$$

Für Punkte p_i in allgemeiner Lage hat obige 10×10 Matrix vollen Rang, d.h. $a_{00} = a_{01} = ... = a_{33} = 0$ ist die einzige Lösung und somit $D = 0$, also folgt die Behauptung.$\square$

2.1. Hauptsatz. a) *Sei* $f \in \Bbbk[x_0, ..., x_3]_4$ *eine allgemeine homogene Form vom Grad 4 in 4 Variablen,* $p_1 \in \check{\mathbb{P}}^3$ *ein allgemeiner Punkt und* p_2 *ein willkürlich gewählter allgemeiner Punkt auf der zu* f *bezüglich* p_1 *apolaren Quadrik* $Q_{p_1} \subset \check{\mathbb{P}}^3$. *Der Schnitt der zu* f *bezüglich* p_1 *bzw.* p_2 *apolaren Quadriken* Q_{p_1} *bzw.* Q_{p_2} *ist dann eine elliptische Kurve* E *vom Grad 4.*

b) *Es gibt dann genau zwei paarweise verschiedene Punktmengen* $\Gamma_1 = \{\bar{p}_3, ..., \bar{p}_8\}$, $\Gamma_2 = \{\tilde{p}_3, ..., \tilde{p}_{10}\}$ *und Linearformen* $l_1, l_2, \bar{l}_1, ..., \bar{l}_8, \tilde{l}_1, ..., \tilde{l}_8$, *so daß* $f = l_1^4 + l_2^4 + \bar{l}_1^4 ... + \bar{l}_8^4 = l_1^4 + l_2^4 + \tilde{l}_1^4 + ... + \tilde{l}_8^4$ *mit* $p_i = V(l_i) \in \check{\mathbb{P}}^3$ *für* $i = 1, 2$ *und* $\bar{p}_j = V(\bar{l}_j) \in \check{\mathbb{P}}^3$ *bzw.* $\tilde{p}_j = V(\tilde{l}_j) \in \check{\mathbb{P}}^3$ *für* $j = 1, ..., 8$. *Zudem erhalten wir, daß* Γ_1, $\Gamma_2 \subset E$ *und die Linearformen* l_i, $\bar{l}_j, \tilde{l}_j$ *bis auf 4-te Einheitswurzeln eindeutig bestimmt sind.*

Reye hatte in seinen Arbeiten ([Reye] S.129) vermutetet, daß durch Angabe der Punkte p_1 und p_2 die restlichen 8 Punkte eindeutig bestimmt seien. Der Beweis des Hauptsatzes zeigt jedoch, daß Reye in diesem Punkt irrte. In den Kapiteln 3 und 4 werden wir beide Lösungen explizit bestimmen.

Der Beweis des Haupsatzes geht aus den folgenden 4 Unterpunkten (2.1.1-2.1.4) hervor:

2.1.1. Lemma. *Sei* $f \in \Bbbk[x_0, ..., x_3]_4$. *Existieren 3 zu* f *apolare irreduzible quadratische Formen* $D_1, D_2, D_3 \in \Bbbk[\partial_0, ..., \partial_3]_2$, *deren Verschwindungsmengen* $Q_1, Q_2, Q_3 \subset \check{\mathbb{P}}^3$ *sich in 8 verschiedenen Punkten* $\Gamma := \{p_1, ..., p_8\} \subset \check{\mathbb{P}}^3$ *schneiden, so lassen sich* $l_1, ..., l_8 \in \Bbbk[x_0, ..., x_3]_1$ *angeben mit* $p_i = V(l_i)$ *oder* $l_i = 0$ *für* $i = 1, ..., 8$ *und* $f = l_1^4 + ... + l_8^4$.

Beweis. $Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = \Gamma$ ist ein vollständiger Durchschnitt, d.h. $I_\Gamma = (D_1, D_2, D_3)$ ([Harris] Prop. 17.18). Γ ist demnach zu $F = V(f)$ apolar und deshalb folgt mit Lemma 1.3. die Behauptung.□

2.1.2.0. Wir kommen nun zur zentralen Fragestellung, wie man zu einer allgemein vorgegebenen homogenen Form $f = \sum_{|\beta|=4} c_\beta x^\beta$ in 4 Variablen Punkte $p_1, ..., p_{10} \in \check{\mathbb{P}}^3$ findet, die eine Darstellung

(*) $\qquad f = l_1^4 + ... + l_{10}^4$ mit $V(l_i) = p_i$ oder $l_i = 0$ für $i = 1, ..., 10$

erlauben. Wir können o.E. annehmen, daß alle l_i ungleich 0 sein müssen, da sich ansonsten f als Summe von weniger als 10 vierten Potenzen von Linearformen schreiben ließe, was nach Satz 2.0. für allgemeines f nicht möglich ist.

Sei also $p = V(l) \in \check{\mathbb{P}}^3$ ein beliebig gewählter Punkt mit $l = a_0x_0 + ... + a_3x_3 \in \Bbbk[x_0, ..., x_3]$. Gibt es eine Darstellung von f wie in (*) mit $p = p_i$ und $l = l_i$ für ein $i \in \{1, ..., 10\}$, dann liegen die neun Punkte $\{p_1, ..., p_{10}\} \setminus \{p_i\}$ auf einer eindeutig bestimmten Quadrik Q_p. Da $\left(f^\perp\right)_2 = 0$ ist p kein Punkt auf Q_p. Die diese Quadrik bestimmende Form

$$D_p = \sum_{\substack{i,j=0,...,3 \\ i \leq j}} a_{ij}\partial_i\partial_j = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \partial^\alpha \text{ mit } a_{ij} \in \Bbbk$$

nennen wir dann die zu f bezüglich p ***apolare quadratische Form*** und ihre Verschwindungsmenge $Q_p = V(D_p)$ die zu f bezüglich p ***apolare Quadrik.*** Man beachte, daß D_p bis auf ein skalares Vielfaches eindeutig bestimmt ist. D_p hat folgende Gleichung zu erfüllen (zur Notation siehe Beweis von Satz 2.0):

$$(**) \qquad D_p(f) = D_p(l^4) = \lambda l^2 \text{ mit einem } \lambda \in \Bbbk$$

$$\Leftrightarrow \Big(\sum_{|\alpha|=2} a_\alpha \partial^\alpha\Big)\Big(\sum_{|\beta|=4} c_\beta x^\beta\Big) = \lambda(a_0x_0 + ... + a_3x_3)^2$$

$$\Leftrightarrow \sum_{\substack{k,l=0,...,3 \\ k \leq l}} \Big(\sum_{\substack{i,j=0,...,3 \\ i \leq j}} a_{ij} c_{\gamma_{ij}+\gamma_{kl}} \gamma_{ij}! \tbinom{\gamma_{ij}+\gamma_{kl}}{\gamma_{ij}} \Big) x_k x_l =$$

$$= \lambda \sum_{\substack{k,l=0,...,3 \\ k \leq l}} \gamma_{kl}! a_k a_l x_k x_l \qquad (\gamma_{kl} \text{ wie im Beweis zu 2.0.})$$

(**) ist also äquivalent zu einem linearen Gleichungssytem in den 11 Unbekannten a_{ij} und λ, welches für alle $k, l = 0, ..., 3$, $k \leq l$, und $A_{ijkl} := c_{\gamma_{ij}+\gamma_{kl}} \gamma_{ij}! \tbinom{\gamma_{ij}+\gamma_{kl}}{\gamma_{ij}}$ folgende Form annimmt:

$$(***) \qquad -\lambda\gamma_{kl} a_k a_l + a_{00}A_{00kl} + a_{01}A_{01kl} + ... + a_{33}A_{33kl} = 0$$

Sei $\xi = V(\xi_0 x_0 + \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3) \in \check{\mathbb{P}}^3$, $\xi_0, ..., \xi_3 \in \mathbb{k}$, ein Punkt auf Q_p, d.h. ξ erfüllt die Gleichung $\sum_{\substack{i,j=0,...,3 \\ i \leq j}} a_{ij}\xi_i\xi_j = 0$, dann liefert diese Bedingung an ξ auch eine lineare Gleichung in den Variablen a_{ij}. Zusammen mit den in (***) gegebenen Gleichungen erhalten wir ein lineares Gleichungssytem in den 11 Unbekannten a_{ij}, λ bestehend aus 11 Gleichungen:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \xi_0^2 & \xi_0\xi_1 & \cdot & \cdot & \cdot & \xi_3^2 \\ -a_0^2 & A_{0000} & A_{0100} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{3300} \\ -a_0a_1 & A_{0001} & A_{0101} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{3301} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -a_3^2 & A_{0033} & A_{0133} & \cdot & \cdot & \cdot & A_{3333} \end{pmatrix}}_{=:A(\xi,a) \text{ mit } a=(a_0,...,a_3)} \begin{pmatrix} \lambda \\ a_{00} \\ a_{01} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{33} \end{pmatrix} = 0$$

Dieses hat genau dann eine nichttriviale Lösung, wenn $D(\xi, a) := \det A(\xi, a) = 0$. Für allgemein gewähltes a ist $D(\xi, a)$ eine bihomogene Form vom Bigrad (2,2) in den Variablen $\xi_0, ..., \xi_3$ und $a_0, ..., a_3$. Ersetzen wir in $D(\xi, a)$ noch ξ_i durch ∂_i, so erhalten wir die gesuchte quadratische Form D_p. Darüber hinaus ist $D(\xi, a)$ symmetrisch in den Einträgen ξ, a, d.h. $D(\xi, a) = D(a, \xi)$. Liegt also ein Punkt $\tilde{p}$ auf Q_p , so ist umgekehrt p ein Punkt der Verschwindungsmenge von $D_{\tilde{p}}$. Alle ***selbstapolaren*** Punkte $\xi \in \check{\mathbb{P}}^3$ (Notation nach [Reye 3]), d.h. $\xi \in Q_\xi$, liegen demnach auf einer Quartik im $\check{\mathbb{P}}^3$, die durch die Gleichung $D(\xi, \xi) = 0$, wenn wir noch ξ_i durch ∂_i ersetzen, gegeben ist.

2.1.2.1. Sei f Summe von 10 vierten Potenzen von Linearformen $l_1, ..., l_{10}$ mit Punkten $p_i = V(l_i) \in \check{\mathbb{P}}^3$ in allgemeiner Lage. Durch die 8 Punkte $p_3, ..., p_{10}$ lassen sich dann genau zwei unabhängige irreduzible Quadriken $Q_i = V(q_i)$, $q_i \in \mathbb{k}[\partial_0, ..., \partial_3]_2$, legen. Diese schneiden sich in einer glatten elliptische Kurve E vom Grad 4 ([Hartshorne] Ex. 7.2). D_{p_1} und D_{p_2} lassen sich dann jeweils als Linearkombination von q_1 und q_2 schreiben. Für allgemeine p_1 und p_2 ist somit $E = Q_{p_1} \cap Q_{p_2}$. Die Glattheit von $Q_{p_1} \cap Q_{p_2}$ folgt demnach auch für allgemeines f.

Wir kommen nun zur Konstruktion einer Darstellung von f wie im Hauptsatz 2.1. behauptet:
Erlaubt ein allgemein gegebenes f eine Darstellung (*) in der p_1 vorkommt, dann ist $D_{p_1}(f) = D_{p_1}\left(l_1^4\right) = 12 l_1^2 \frac{D_{p_1}(l_1^2)}{2} = 6 l_1^2 D_{p_1}(l_1^2)$ und somit l_1 bis

auf 4-te Einheitswurzeln eindeutig bestimmt. Sei nun weiter $p_2 = V(l_2) \in \check{\mathbb{P}}^3$ ein allgemeiner Punkt auf der zu f bezüglich p_1 apolaren Quadrik Q_{p_1}. Gibt es eine Darstellung (*) von f, in der p_2 vorkommt, so ist auch l_2 bis auf 4-te Einheitswurzeln eindeutig bestimmt. Die restlichen 8 Punkte $p_i = V(l_i) \in \check{\mathbb{P}}^3$, $i = 3, ..., 10$, müssen dann auf der elliptischen Kurve $E := Q_{p_1} \cap Q_{p_2}$ liegen. Des weiteren gilt für jeweils zwei Punkte p_i, p_j, $i \neq j$, daß $p_i \in Q_{p_j}$ bzw. $p_j \in Q_{p_i}$.

2.1.3. Satz. *Sei f eine allgemeine homogene Form vom Grad 4 in 4 Variablen und $p_1 \in \check{\mathbb{P}}^3$, $p_2 \in Q_{p_1}$ allgemein gewählte Punkte. Existiert dann ein Punktetupel $(p, q, r) \in E \times E \times E$ mit paarweise verschiedenen Punkten p, q, r und $q \in Q_p$, $r \in Q_p$, $q \in Q_r$, so existiert genau eine Darstellung*

$$f = l_1^4 + ... + l_{10}^4 \quad \textit{mit } l_1, ..., l_{10} \in \Bbbk[x_0, ..., x_3]_1$$

mit $V(l_1) = p_1$, $V(l_2) = p_2, V(l_3) = p$, $V(l_4) = q$ und $V(l_5) = r$ (bis auf Anordnung der l_i). Alle Linearformen l_i sind dann bis auf 4-te Einheitswurzeln eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien l_1, l_2 wie in 2.1.2. ausgeführt bestimmt. l_p, l_q, $l_r \in \Bbbk[x_0, ..., x_3]_1$ sind durch $D_p(f) = D_p\left(l_p^4\right)$, $D_q(f) = D_q\left(l_q^4\right)$ bzw. $D_r(f) = D_r\left(l_r^4\right)$ und $p = V(l_p)$, $q = V(l_q)$ bzw. $r = V(l_r)$ bis auf 4-te Einheitswurzeln eindeutig bestimmt. D_1, D_2 und D_p sind drei zu $f - l_1^4 - l_2^4 - l_p^4$ apolare quadratische Formen, deren Verschwindungsmengen sich in 8 Punkten $q, r, s_1, ..., s_6$ schneiden. Nach Lemma 2.0. gibt es dann Linearformen $\tilde{l}_q, \tilde{l}_r, g_1, ..., g_6 \in \Bbbk[x_0, ..., x_3]_1$ mit $q = V(\tilde{l}_q) \vee \tilde{l}_q = 0$, $r = V(\tilde{l}_r) \vee \tilde{l}_r = 0$, $s_k = V(g_k) \vee g_k = 0$ für alle $k = 1, ..., 6$ und

$$f - l_1^4 - l_2^4 - l_p^4 = \tilde{l}_q^4 + \tilde{l}_r^4 + g_1^4 + ... + g_6^4 \tag{1}$$

Analog erhalten wir drei zu $f - l_1^4 - l_2^4 - l_q^4$ apolaren quadratischen Formen D_1, D_2 und D_q, deren zugehörige Quadriken sich in den 8 Punkten $p, r, t_1, ..., t_6$ schneiden. Es lassen sich dann Linearformen $l_p^*, l_r^*, h_1, ..., h_6 \in \Bbbk[x_0, ..., x_3]_1$ mit $p = V(l_p^*) \vee l_p^* = 0$, $r = V(l_r^*) \vee l_r^* = 0$, $t_k = V(h_k) \vee h_k = 0$ und

$$f - l_1^4 - l_2^4 - l_q^4 = l_p^{*4} + l_r^{*4} + h_1^4 + ... + h_6^4 \tag{2}$$

angeben. Die Differenz der beiden Gleichungen (1) und (2) ist dann:

$$0 = (l_p^{*4} - l_p^4) + (l_q^4 - \tilde{l}_q{}^4) + (l_r^{*4} - \tilde{l}_r^4) + h_1^4 + ... + h_6^4 - (g_1^4 + ... + g_6^4)$$

$$(3) \qquad \Longleftrightarrow \quad 0 = \bar{l}_p^4 + \bar{l}_q^4 + \bar{l}_r^4 + h_1^4 + ... + h_6^4 - (g_1^4 + ... + g_6^4)$$

mit Linearformen $\bar{l}_p, \bar{l}_q, \bar{l}_r \in \mathbb{k}\,[x_0, ..., x_3]_1$ und $p = V(\bar{l}_p) \vee \bar{l}_p = 0$, $q = V(\bar{l}_q) \vee \bar{l}_q = 0$, $r = V(\bar{l}_r) \vee \bar{l}_r = 0$. Anwendung von D_p auf (3) ergibt

$$(4) \qquad 0 = \hat{l}_p^2 + \hat{h}_1^2 + ... + \hat{h}_6^2$$

wobei $\hat{h}_k, \hat{l}_p \in \mathbb{k}\,[x_0, ..., x_3]_1$ und $p = V(\hat{l}_p) \vee \hat{l}_p = 0$, $t_k = V(\hat{h}_k) \vee \hat{h}_k = 0\ \forall k$. Streichen wir alle Terme in (4), die 0 sind, so erhalten wir eine Darstellung der 0 wie folgt:

$$(5) \qquad 0 = w_1^2 + ... + w_{i_0}^2$$

mit $i_0 \leq 7$ und $w_k \in \mathbb{k}[x_0, ..., x_3]_1$, $e_k = V(w_k) \in E$

Wir zeigen nun, daß $i_0 = 0$ sein muß: Da E vollständiger Durchschnitt zweier irreduzibler Quadriken ist, kann E keine drei kollinearen Punkte enthalten. Wir schließen nun $i_0 \neq 0$ sukzessive aus.

$i_0 = 7$: Da deg $E = 4$ hat E mit einer Hyperebene in $\check{\mathbb{P}}^3$ genau 4 Punkte gemeinsam. Liegen vier der 7 Punkte $e_1, ..., e_7$ auf einer Ebene $L_1 = V(d_1)$ mit $d_1 \in \mathbb{k}[\partial_0, ..., \partial_3]_1$, dann können wir durch zwei der übrigen Punkte eine weitere Ebene $L_2 = V(d_2)$ mit $d_2 \in \mathbb{k}[\partial_0, ..., \partial_3]_1$ legen, die den letzten Punkt, o.E. sei dieser der Punkt e_7, nicht enthält. Liegen keine vier der 7 Punkte $e_1, ..., e_7$ auf einer Ebene, so sei L_1 eine Ebene durch e_1, e_2 und e_3 und L_2 eine Ebene durch e_4, e_5 und e_6, die e_7 nicht enthält. $D = d_1 d_2$ ist also in jedem Fall eine quadratische Form mit $0 = D(w_7^2)$. Folglich muß $w_7 = 0$ sein, also $i_0 \neq 7$.
$i_0 = 1, ..., 6$ führen wir auf analoge Weise zum Widerspruch.
Für die Darstellung in (4) ergibt sich folglich, daß $\hat{l}_p = \hat{h}_1 = ... = \hat{h}_6 = 0$. Da einer der Punkte $t_1, ..., t_6$ nicht auf Q_p liegt, o.E. sei dies der Punkt t_6, muß wegen $D_p(h_6^4) = \hat{h}_6^2 = 0$ auch $h_6 = 0$ sein, also liefert (2) die gesuchte Darstellung:

$$f = l_1^4 + l_2^4 + (l_p^*)^4 + l_q^4 + (l_r^*)^4 + h_1^4 + ... + h_5^4$$

□

Für f wie in 2.1.3. ist $p_i = V(l_i) \in Q_{p_j}$ für alle $i, j = 3, ..., 10$, $i \neq j$. Somit liefert jede solche Darstellung genau $3!\binom{8}{3} = 336$ verschiedene Punktetupel (p, q, r) mit paarweise verschiedenen Punkten p, q, r, die folgende Bedingung erfüllen:

(B) $\quad (p, q, r) \in E \times E \times E$ *mit* $q \in Q_p$, $r \in Q_p$, $q \in Q_r$, $E = Q_{p_1} \cap Q_{p_2}$

2.1.4. Hilfssatz. *Mit den oben eingeführten Bezeichnungen gilt: Es gibt genau 672 unterschiedliche Punktetupel (p, q, r) mit paarweise verschiedenen p, q, r, die* **(B)** *erfüllen. Es folgt daraus, daß f genau zwei voneinander verschiedene Darstellungen von f als Summe von 4-ten Potenzen von Linearformen besitzt, die genau die Linearformen l_1 und l_2 gemeinsam haben.*

Beweis. $E \times E \times E$ läßt sich als Schnitt der Hyperflächen

$$H_1 := Q_{p_1} \times \check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3,\ H_2 := Q_{p_2} \times \check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3,\ H_3 := \check{\mathbb{P}}^3 \times Q_{p_1} \times \check{\mathbb{P}}^3,$$

$$H_4 := \check{\mathbb{P}}^3 \times Q_{p_2} \times \check{\mathbb{P}}^3,\ H_5 := \check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3 \times Q_{p_1} \text{ und } H_6 := \check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3 \times Q_{p_2}$$

darstellen. Darüber hinaus seien

$$H_{12} := \{(x, y, z) \in \check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3 : y \in Q_x\},$$

$$H_{23} := \{(x, y, z) \in \check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3 : z \in Q_y\}$$

$$\text{und} \quad H_{13} := \{(x, y, z) \in \check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3 : z \in Q_x\}$$

die Hyperflächen in $\check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3$, die die gegenseitigen Apolaritätsbedingungen der Punkte p, q, r beschreiben. Alle Punktetupel (p, q, r), die **(B)** erfüllen, liegen also auf dem Schnitt der 9 Hyperflächen $H_1, ..., H_6, H_{12}, H_{23}, H_{23}$. Für den Chow Ring $A^*(\check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3)$ gilt, daß $A^*(\check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3 \times \check{\mathbb{P}}^3) \cong \mathbb{Z}[s, t, r]/(s^4, t^4, r^4)$ ([Fulton] §8). Dabei repräsentiert $s^3t^3r^3$ die Klasse eines Punktes, d.h. $[pt] = s^3t^3r^3$. Weiter gilt aufgrund der Bihomogenität von $D(\xi, a)$ vom Bigrad (2,2), daß

$$[H_1] = [H_2] = 2s,\ [H_3] = [H_4] = 2t,\ [H_5] = [H_6] = 2r$$

$$\text{und } [H_{12}] = 2s + 2t,\ [H_{23}] = 2t + 2r,\ [H_{13}] = 2s + 2r.$$

Für die Anzahl N der Punktetupel (p, q, r) (mit Vielfachheit), die **(B)** erfüllen, ergibt sich demnach:

$$[H_1] \cdot [H_2] \cdot [H_3] \cdot [H_4] \cdot [H_5] \cdot [H_6] \cdot [H_{12}] \cdot [H_{23}] \cdot [H_{13}] =$$

$$= 2^9 s^2t^2r^2(s + t)(s + r)(t + r) = 2^{10}s^3t^3r^3 = 2^{10}[pt] \Longrightarrow N = 2^{10}$$

Alle selbstapolaren Punkte liegen auf einer Quartik $\Omega \subset \check{\mathbb{P}}^3$. Durch Rechnung in einem Beipiel und Anwendung von Halbstetigkeitsargumenten zeigen wir, daß $\Omega \cap E$ für allgemeines f und allgemein gewählte Punkte p_1, p_2 nicht singulär ist, d.h. die Schnittmenge besteht aus genau 16 paarweise verschiedenen Punkten. Ebenso zeigt eine Beispielrechnung, daß alle Punktetupel (p, p, p) mit $p \in \Omega \cap E$ einfache Schnittpunkte der 9 obigen Hyperflächen sind. Davon gibt es somit genau 16 (siehe Anhang A.1.-A.2 und C.1.).

Es soll nun die Anzahl N aller Punktetupel (p, q, r) aus **(B)** mit $p = q \neq r \vee p = r \neq q \vee q = r \neq p$ bestimmt werden. Für selbstapolare Punkte $p \in E$ hat Q_p außer $p \in \Omega \cap E$ noch 7 von p verschiedene Punkte $q_1, ..., q_7$ mit E gemeinsam. Rechnung in einem Beispiel für f zeigt, daß diese Punktetupel einfache Schnitte der 9 Hyperflächen sind (siehe Anhang A.1.-A.2. und C.1.). Folglich gilt $N = 16 \cdot 3 \cdot 7 = 336$.

Für die Anzahl M (mit Vielfachheit) von Punktetupel (p, q, r) im Schnitt von $H_1, ..., H_6, H_{12}, H_{23}, H_{23}$ mit paarweise verschiedenen Punkten p, q, r erhalten wir demnach:

$$M = 2^{10} - 16 - 336 = 672 = 2 \cdot 3!\binom{8}{3}$$

Es folgt also die Existenz eines solchen Punktetupels (p, q, r) und somit auch die Existenz einer Darstellung von f wie in 2.1.3. Wie bereits oben ausgeführt, liefert eine solche Darstellung genau 336 verschiedene Punktetupel (p, q, r) mit paarweise verschiedenen p, q, r, die **(B)** erfüllen. Wieder zeigen wir durch Rechnung in einem Beipiel und Zuhilfenahme von Halbstetigkeitsargumenten, daß diese Punktetupel einfache Schnittpunkte der Hyperflächen $H_1, ..., H_6, H_{12}, H_{13}$ und H_{23} sind (siehe Anhang A.1.-A.2., B und C.1.). Daraus folgt die Behauptung.□

Wir haben damit den Hauptsatz bewiesen. Eine unmittelbare Folgerung desselben ist

2.2.0. Satz. *Seien $l_i \in \mathbb{k}[x_0, ..., x_3]_1$, $i = 1, ..., 8$, Linearformen mit Punkten $p_i = V(l_i) \in \check{\mathbb{P}}^3$ in allgemeiner Lage vorgegeben und $f = l_1^4 + ... + l_8^4$. Dann gibt es genau eine zweite, von der ersten verschiedene, Darstellung $f = \tilde{l}_1^4 + ... + \tilde{l}_8^4$, $\tilde{l}_i \in \mathbb{k}[x_0, ..., x_3]_1$, wobei die Punkte $p_i = V(l_i) \in \check{\mathbb{P}}^3$ und $\tilde{p}_i = V(\tilde{l}_i) \in \check{\mathbb{P}}^3$ alle auf dem Schnitt der beiden zu f apolaren Quadriken liegen. Die auftretenden Linearformen sind bis auf 4-te Einheitswurzeln eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $l_i \in \mathbb{k}[x_0, ..., x_3]_1$, $i = 1, ..., 8$, Linearformen mit Punkten $p_i = V(l_i) \in \check{\mathbb{P}}^3$ in allgemeiner Lage vorgegeben und $f = l_1^4 + ... + l_8^4$, dann kann man zwei weitere Linearformen $l, \tilde{l}$ wählen, so daß $\{l, \tilde{l}, l_1, ..., l_8\}$ eine allgemeine Kollektion von 10 Linearformen darstellt. Auf $f^* := l^4 + \tilde{l}^4 + l_1^4 + ... + l_8^4$ wenden wir den Hauptsatz an: Bei festen l, $\tilde{l}$ gibt es für $f = l_1^4 + ... + l_8^4$ noch genau eine weitere verschiedene Darstellung $\tilde{l}_1^4 + ... + \tilde{l}_8^4$ von f, wobei alle Punkte $\tilde{p}_i := V(\tilde{l}_i) \in \check{\mathbb{P}}^3$ genau wie die Punkte p_i auf dem Schnitt E der beiden zu f^* bezüglich $p = V(l)$ bzw. $\tilde{p} = V(\tilde{l})$ apolaren Quadriken, liegen. Das Verschwindungsideal von 8 Punkten in allgemeiner Lage enthält genau zwei quadratische Erzeuger. Die beiden durch diese quadratischen Erzeuger bestimmten Quadriken schneiden sich in einer elliptischen Kurve vom Grad 4, d.h. eine solche elliptische Kurve ist durch Angabe von 8 auf ihr liegenden Punkte eindeutig bestimmt. E ist daher nicht von der Wahl der beiden Linearformen $l, \tilde{l}$ abhängig. Es folgt die Behauptung.□

Abschließend erhalten wir in diesem Zusammenhang noch ein Ergebnis, das wir im folgenden Kapitel benötigen:

2.2.1. Lemma. *Sei f wie in Satz 2.2.0., dann gilt:* $\dim (A^F)_2 = 2$.

Beweis. Wir übernehmen die Notationen aus dem vorangehenden Satz. Es gibt dann noch genau eine weitere Darstellung von f als Summe von 8 vierten Potenzen von Linearformen $\tilde{l}_i$. Die Punkte p_i, $\tilde{p}_i$ liegen alle auf der eindeutig bestimmten elliptischen Kurve E, die durch den Schnitt zweier Quadriken, bestimmt durch quadratische Formen D_1 und D_2, hervorgeht. $f^{\perp}$ enthält also wenigstens 2 unabhängige quadratische Erzeuger. Angenommen $f^{\perp}$ enthielte noch eine weitere von D_1, D_2 unabhängige quadratische Form D_3, dann hätten wir für $i = 1, 2, 3$ und $f^* := l^4 + \tilde{l}^4 + f$ wie in 2.2.0., daß

$$D_i(f^*) = D_i(l^4) + D_i(\tilde{l}^4) = \lambda_i l^2 + \mu_i \tilde{l}^2 \text{ mit } \lambda_i, \mu_i \in \Bbbk$$

Es gäbe somit eine Linearkombination $D = \sum \eta_i D_i$ der quadratischen Formen D_i mit $D(f^*) = 0$, d.h. eine zu f^* apolare quadratische Form, im Widerspruch zu Satz 2.0. Folglich hat $f^{\perp}$ genau zwei quadratische Erzeuger.□

3. Syzygiendarstellungen

In diesem Kapitel liefern wir die notwendigen Informationen über A^F und T/I_Γ für ein $f = l_1^4 + ... + l_8^4$ mit Linearformen $l_i \in \Bbbk[x_0, ..., x_3]_1$ bzw. Punkten $p_i = V(l_i) \in \check{\mathbb{P}}^3$ in allgemeiner Lage um in Kapitel 4 abschließend eine Konstruktion der Verschwindungsideale I_{Γ_1}, I_{Γ_2} der beiden Punktemenge $\Gamma_1 = \{p_1, ..., p_8\} \subset \check{\mathbb{P}}^3$ bzw. $\Gamma_2 = \{\tilde{p}_1, ..., \tilde{p}_8\} \subset \check{\mathbb{P}}^3$ aus Satz 2.2.0. angeben zu können. In 3.3. und 3.4 nehmen wir bereits einige Ergebnisse über die Geometrie der Punktmengen Γ_1 bzw. Γ_2 vorweg. So zeigen wir, daß es einen Isomorphismus δ zwischen der durch f bestimmten elliptische Kurve E vom Grad 4 (siehe 2.2.0.) und einer elliptischen Kurve $\tilde{E} \subset \mathbb{P}^7$ vom Grad 12 gibt. $\tilde{E}$ hat dann mit zwei linearen Unterräumen $L_1, L_2 \cong \mathbb{P}^3$ jeweils genau die Punkte $\delta(\Gamma_1)$ bzw. $\delta(\Gamma_2)$ gemeinsam.

In 3.1 und 3.2 werden minimal freie Auflösungen von T/I_Γ und A^F bestimmt:

3.1. *Lemma. Sei T/I_Γ der homogenen Koordinatenring einer Punktemenge $\Gamma = \{p_1, ..., p_8\} \subset \check{\mathbb{P}}^3$ von 8 Punkten in allgemeiner Lage in $\check{\mathbb{P}}^3$, dann besitzt T/I_Γ die minimal freie Auflösung:*

$$\mathbf{F}\colon\; 0 \leftarrow T/I_\Gamma \overset{\theta_0}{\leftarrow} T \overset{\theta_1}{\leftarrow} T^2(-2) \oplus T^4(-3) \overset{\theta_2}{\leftarrow} T^9(-4) \overset{\theta_3}{\leftarrow} T^4(-5) \leftarrow 0$$

Beweis. $M := T/I_\Gamma$ ist Cohen-Macaulay ([Eisenbud] Ex. 18.15), folglich besitzt M eine minimal freie Auflösung der Länge 3 = codim(ann T/I_Γ) =codim(I_Γ) ([Eisenbud] Cor. 19.15.). Ist $x \in T_1$ ein Nichtnullteiler von T und M (die Gleichung einer Hyperbene, die keinen der Punkte p_i enthält), so hat die minimal freie Auflösung von M als T-Modul das gleiche Syzygientableau wie die von $\bar{M} := M/xM$ als $\bar{T} = T/x$-Modul. Sei nun

$$\mathbf{F} : 0 \leftarrow T/I_\Gamma \overset{\theta_0}{\leftarrow} T \overset{\theta_1}{\leftarrow} F_1 \leftarrow ... \overset{\theta_3}{\leftarrow} F_3 \leftarrow 0 \text{ mit freien } T\text{-Moduln } F_1, ..., F_3$$

die minimal freie Auflösung von M als T-Modul. Für $F_i = \bigoplus_{i,j} T^{\beta_{ij}}(-j)$ gilt $\beta_{ij} = \dim Tor_i^T(\Bbbk, M)_j = \dim Tor_i^{\bar{T}}(\Bbbk, \bar{M})_j$. $Tor_i^{\bar{T}}(\Bbbk, \bar{M})_j$ kann auch berechnet werden, indem wir anstatt einer freien Auflösung von $\bar{M}$ eine freie Auflösung von $\Bbbk$ mit freien $\bar{T}-$Moduln betrachten und diese mit $\bar{M}$ tensorieren ([Eisenbud] 19.5.). Eine solche Auflösung von $\Bbbk$ ist durch den Koszulkomplex der Länge 3 gegeben:

$$0 \leftarrow \Bbbk \leftarrow \bar{T} \leftarrow \bar{T}^3(-1) \leftarrow \bar{T}^3(-2) \leftarrow \bar{T}(-3) \leftarrow 0$$

Wir haben noch die Werte der Hilbertfunktion H_M von M zu bestimmen: Offensichtlich gilt $H_M(0) = 1$ und $H_M(1) = 4$. Da sich durch 8 Punkte in allgemeiner Lage genau $\binom{3+d}{d} - 8$ Hyperflächen vom Grad $d \in \mathbb{N}$ legen lassen, ergibt sich $H_M(d) = \binom{3+d}{d} - (\binom{3+d}{d} - 8) = 8$ und somit für die Werte der Hilbertfunktion $H_{\bar{M}}$ des $\bar{T}-$Moduls $\bar{M}$, daß $H_{\bar{M}}(0) = 1$, $H_{\bar{M}}(1) = 3$, $H_{\bar{M}}(2) = 4$ und $H_{\bar{M}}(d) = 0$ für alle $d \geq 3$. Tensorieren des obigen Koszulkomplexes mit $\bar{M}$ liefert den Komplex:

$$0 \leftarrow \underbrace{\bar{M}}_{M^{(0)}} \overset{\varphi_1}{\leftarrow} \underbrace{\bar{M} \otimes \bar{T}^3(-1)}_{M^{(1)}} \overset{\varphi_2}{\leftarrow} \underbrace{\bar{M} \otimes \bar{T}^3(-2)}_{M^{(2)}} \overset{\varphi_3}{\leftarrow} \underbrace{\bar{M}(-3)}_{M^{(3)}} \leftarrow 0$$

Unter Beachtung der Graduierung erhalten wir das folgende Tableau:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \leftarrow & M^{(0)} & \overset{\varphi_1}{\leftarrow} & M^{(1)} & \overset{\varphi_2}{\leftarrow} & M^{(2)} & \overset{\varphi_3}{\leftarrow} & M^{(3)} & \leftarrow & 0 \\
 & & M_0^{(0)} & & M_1^{(1)} & & M_2^{(2)} & & M_3^{(3)} & & \\
 & & & \overset{\varphi_1^{(1)}}{\swarrow} & & \overset{\varphi_2^{(2)}}{\swarrow} & & \overset{\varphi_3^{(3)}}{\swarrow} & & & \\
 & & M_1^{(0)} & & M_2^{(1)} & & M_3^{(2)} & & M_4^{(3)} & & \\
 & & & \overset{\varphi_1^{(2)}}{\swarrow} & & \overset{\varphi_2^{(3)}}{\swarrow} & & \overset{\varphi_3^{(4)}}{\swarrow} & & & \\
 & & M_2^{(0)} & & M_3^{(1)} & & M_4^{(2)} & & M_5^{(3)} & &
\end{array}$$

wobei $\varphi_k^{(l)} : M_l^{(k)} \to M_l^{(k-1)}$ die Zerlegung der Abbildung φ_k in die Anteile vom Grad l darstellt. Diese Abbildungen sind im obigen Tableau durch die schräg verlaufenden Pfeile dargestellt. Sei $c_{kl} = \dim M_l^{(k)}$, dann nimmt obiges Tableau mit den Einträgen c_{kl} an Stelle von $M_l^{(k)}$ folgende Form an:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \leftarrow & M^{(0)} & \overset{\varphi_1}{\leftarrow} & M^{(1)} & \overset{\varphi_2}{\leftarrow} & M^{(2)} & \overset{\varphi_3}{\leftarrow} & M^{(3)} & \leftarrow & 0 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
 & & 3 & & 9 & & 9 & & 3 & & \\
 & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
 & & 4 & & 12 & & 12 & & 4 & &
\end{array}$$

Da die alternierende Summe der Dimensionen der Homologien eines beliebigen Komplexes $0 \leftarrow W_0 \leftarrow W_1 \leftarrow ... \leftarrow W_n \leftarrow 0$ von R-Moduln, R ein Ring, gleich der alternierenden Summe $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim W_i$ der Dimensionen von W_i ist, können wir die Bettizahlen $\beta_{ij} = \dim Tor_i^{T/x}(\Bbbk, M/xM)_j$ mit Hilfe des obigen Tableaus berechnen. Offensichtlich gilt $\beta_{00} = 1$ und $\beta_{0j} = 0$ für alle $j > 0$. Die Punkte Γ liegen nicht auf einer Hyperbene, woraus sich $\beta_{11} = 0$ und damit auch $\beta_{22} = \beta_{33} = 0$ ergibt, also $\beta_{12} = 9 - 4 - 3 = 2$. I_Γ hat 2 quadratische Erzeuger q_1, q_2. Diese haben genau eine Syzygie, die Koszulrelation $\binom{-q_2}{q_1}$, also ist $\beta_{23} = 0$, woraus wir $\beta_{34} = 0$ schließen. Damit gilt: $\beta_{13} = 12 - 9 + 1 = 4$ und $\beta_{24} = 12 - 3 = 9$. Das Syzygientableau von T/I_Γ hat demnach folgende Form:

$$\begin{array}{cccc} 1 & - & - & - \\ - & 2 & - & - \\ - & 4 & 9 & 4 \end{array}$$

und somit T/I_Γ die minimal freie Auflösung:

$$\mathbf{F}\colon\ 0 \leftarrow T/I_\Gamma \xleftarrow{\theta_0} T \xleftarrow{\theta_1} T^2(-2) \oplus T^4(-3) \xleftarrow{\theta_2} T^9(-4) \xleftarrow{\theta_3} T^4(-5) \leftarrow 0$$

□

3.2. *Lemma.* *Für $f = l_1^4 + ... + l_8^4$ mit Linearformen $l_i \in \Bbbk[x_0, ..., x_3]_1$ bzw. Punkten $p_i = V(l_i) \in \check{\mathbb{P}}^3$ in allgemeiner Lage, hat A^F die minimal freie Auflösung:*

$$\mathbf{L}\colon\ 0 \leftarrow A^F \stackrel{\phi_0}{\leftarrow} T \stackrel{\phi_1}{\leftarrow} T^2(-2) \oplus T^8(-3) \stackrel{\phi_2}{\leftarrow} T^{18}(-4) \stackrel{\phi_3}{\leftarrow}$$

$$\stackrel{\phi_3}{\leftarrow} T^8(-5) \oplus T^2(-6) \stackrel{\phi_4}{\leftarrow} T(-8) \leftarrow 0$$

Beweis. Für die Hilbertfunktion H_N von $N = A^F$ gilt, daß $H_N(0) = 1$, $H_N(1) = 4$, $H_N(d) = 0$ für $d > 4$ und $H_N(2) = 10 - 2 = 8$ wie bereits in 2.2.1. gezeigt. Da A^F Gorenstein ist, sind die Werte der Hilbertfunktion "symmetrisch", d.h. $H_N(4-d) = H_N(d)$ für $d = 0, 1, ..., 4$, also ist $H_N(3) = 4$ und $H_N(4) = 1$. Da $I_\Gamma \subset A^F$ muß die minimal freie Auflösung von A^F den $\mathbf{F}$ als Unterkomplex enthalten. Darüber hinaus hat eine solche Auflösung:

$$\mathbf{L}\colon 0 \leftarrow A^F \stackrel{\phi_0}{\leftarrow} T \stackrel{\phi_1}{\leftarrow} G_1 \stackrel{\phi_2}{\leftarrow} ... \stackrel{\phi_4}{\leftarrow} G_4 \leftarrow 0 \text{ mit freien T-Moduln } G_1, ..., G_4$$

Länge 4 (=*codim* $f^\perp$) und ist selbstdual, d.h. $\mathbf{L} \cong \mathbf{L}^*$ als Komplexe und $G_4 \cong T$. ([Eisenbud] Cor. 21.16)

Die Berechnung des Syzygientableaus von A^F mit Bettizahlen $\beta_{ij} = \dim Tor_i^T(\Bbbk, N)_j$ erfolgt in analoger Weise wie die von T/I_Γ in 3.1. Wir müssen dazu N mit dem Koszulkomplex der Länge 4 tensorieren, welcher uns eine freie Auflösung von $\Bbbk$ mit freien $T-$Moduln liefert:

$$0 \leftarrow \Bbbk \leftarrow T \leftarrow T^4(-1) \leftarrow T^6(-2) \leftarrow T^4(-3) \leftarrow T(-4) \leftarrow 0$$

Wir erhalten dann den Komplex

$$0 \leftarrow \underbrace{N}_{N^{(0)}} \stackrel{\psi_1}{\leftarrow} \underbrace{N \otimes T^4(-1)}_{N^{(1)}} \stackrel{\psi_2}{\leftarrow} \underbrace{N \otimes T^6(-2)}_{N^{(2)}} \stackrel{\psi_3}{\leftarrow}$$

$$\stackrel{\psi_3}{\leftarrow} \underbrace{N \otimes T^4(-3)}_{N^{(3)}} \stackrel{\psi_4}{\leftarrow} \underbrace{N(-4)}_{N^{(4)}} \leftarrow 0$$

welcher unter Beachtung der Graduierung folgende Gestalt annimmt:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \leftarrow & N^{(0)} & \overset{\psi_1}{\leftarrow} & N^{(1)} & \overset{\psi_2}{\leftarrow} & N^{(2)} & \overset{\psi_3}{\leftarrow} & N^{(3)} & \overset{\psi_4}{\leftarrow} & N^{(4)} & \leftarrow & 0 \\
 & & N_0^{(0)} & & N_1^{(1)} & & N_2^{(2)} & & N_3^{(3)} & & N_4^{(4)} & & \\
 & & & \overset{\psi_1^{(1)}}{\swarrow} & & \overset{\psi_2^{(2)}}{\swarrow} & & \overset{\psi_3^{(3)}}{\swarrow} & & \overset{\psi_4^{(4)}}{\swarrow} & & & \\
 & & N_1^{(0)} & & N_2^{(1)} & & N_3^{(2)} & & N_4^{(3)} & & N_5^{(4)} & & \\
 & & & \overset{\psi_1^{(2)}}{\swarrow} & & \overset{\psi_2^{(3)}}{\swarrow} & & \overset{\psi_3^{(4)}}{\swarrow} & & \overset{\psi_4^{(5)}}{\swarrow} & & & \\
 & & N_2^{(0)} & & N_3^{(1)} & & N_4^{(2)} & & N_5^{(3)} & & N_6^{(4)} & & \\
 & & & \overset{\psi_1^{(3)}}{\swarrow} & & \overset{\psi_2^{(4)}}{\swarrow} & & \overset{\psi_3^{(5)}}{\swarrow} & & \overset{\psi_4^{(6)}}{\swarrow} & & & \\
 & & N_3^{(0)} & & N_4^{(1)} & & N_5^{(2)} & & N_6^{(3)} & & N_7^{(4)} & & \\
 & & & \overset{\psi_1^{(4)}}{\swarrow} & & \overset{\psi_2^{(5)}}{\swarrow} & & \overset{\psi_3^{(6)}}{\swarrow} & & \overset{\psi_4^{(7)}}{\swarrow} & & & \\
 & & N_4^{(0)} & & N_5^{(1)} & & N_6^{(2)} & & N_7^{(3)} & & N_8^{(4)} & &
\end{array}$$

Dabei stellt $\psi_k^{(l)} : N_l^{(k)} \to N_l^{(k-1)}$ die Zerlegung der Abbildung ψ_k in die Anteile vom Grad l dar. Mit $d_{kl} = \dim M_l^{(k)}$ nimmt obiges Tableau mit den Einträgen d_{kl} an Stelle von $M_l^{(k)}$ folgende Form an:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \leftarrow & N^{(0)} & \overset{\psi_1}{\leftarrow} & N^{(1)} & \overset{\psi_2}{\leftarrow} & N^{(2)} & \overset{\psi_3}{\leftarrow} & N^{(3)} & \overset{\psi_4}{\leftarrow} & N^{(4)} & \leftarrow & 0 \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
 & & 4 & & 16 & & 24 & & 16 & & 4 & & \\
 & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
 & & 8 & & 32 & & 48 & & 32 & & 8 & & \\
 & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
 & & 4 & & 16 & & 24 & & 16 & & 4 & & \\
 & & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & &
\end{array}$$

Die Bettizahlen β_{ij} lassen sich wie in 3.1. sukzessive bestimmen: Offensichtlich ergibt sich $\beta_{01} = \beta_{02} = \beta_{03} = \beta_{04} = 0$. $f^{\perp}$ enthält keine linearen

Erzeuger, also gilt $\beta_{11} = 0$ und damit auch $\beta_{22} = \beta_{33} = \beta_{44} = 0$. Nach Lemma 2.2.1 ist $\beta_{12} = 2$. $\beta_{23} = \beta_{34} = \beta_{45} = 0$ folgt analog wie in 3.1. Die Dualität des Komplexes **L** liefert dann $\beta_{14} = \beta_{34} = 0$, $\beta_{47} = \beta_{01} = 0$, $\beta_{25} = \beta_{23} = 0$ und $\beta_{36} = \beta_{12} = 2$. Schließlich erhalten wir $\beta_{35} = \beta_{13} = 32 - 4 - (24 - 4) = 8$ und $\beta_{24} = 48 - (16 - 1) - (16 - 1) = 18$. Wir können nun das Syzygientableau von A^F angeben:

1	–	–	–	–
–	2	–	–	–
–	8	18	8	–
–	–	–	2	–
–	–	–	–	1

Die minimal freie Auflösung von A^F ist demnach:

$$\mathbf{L}:\ 0 \leftarrow A^F \stackrel{\phi_0}{\leftarrow} T \stackrel{\phi_1}{\leftarrow} T^2(-2) \oplus T^8(-3) \stackrel{\phi_2}{\leftarrow} T^{18}(-4) \stackrel{\phi_3}{\leftarrow}$$

$$\stackrel{\phi_3}{\leftarrow} T^8(-5) \oplus T^2(-6) \stackrel{\phi_4}{\leftarrow} T(-8) \leftarrow 0$$

□

Um die eingangs angedeutete Isomorphie $E \cong \tilde{E} \subset \mathbb{P}^7$ zu zeigen, betrachten wir den *flip* einer Matrix:

3.3. *Flip einer Matrix.* Sei $A_{(\partial_0,...,\partial_3)} = (A_{ij})_{ij}$ eine $m \times n$ Matrix, $m, n \in \mathbb{N}$, mit linearen Einträgen $A_{ij} = a_{ij}^{(0)}\partial_0 + ... + a_{ij}^{(3)}\partial_3 \in \Bbbk[\partial_0, ..., \partial_3]_1$, $i = 1, .., m$, $j = 1, .., n$. Setzt man für $\partial_0, ..., \partial_3$ feste Werte $\xi_0, ..., \xi_3 \in \Bbbk$ ein, so erhält man eine durch $A_{(\xi_0,...,\xi_3)} = (a_{ij}^{(0)}\xi_0 + ... + a_{ij}^{(3)}\xi_3)_{ij}$ gegebene lineare Abbildung $A_{(\xi_0,...,\xi_3)} : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$. Mit $y = (y_0, ..., y_{n-1})^t \in \Bbbk^n$ gilt dann:

$$A_{(\xi_0,...,\xi_3)} \cdot y =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}^{(0)}\xi_0 + ... + a_{11}^{(3)}\xi_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{1n}^{(0)}\xi_0 + ... + a_{1n}^{(3)}\xi_3 \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1}^{(0)}\xi_0 + ... + a_{m1}^{(3)}\xi_3 & \cdot\ \cdot\ \cdot & a_{mn}^{(0)}\xi_0 + ... + a_{mn}^{(3)}\xi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} y_0(a_{11}^{(0)}\xi_0 + ... + a_{11}^{(3)}\xi_3) + ... + y_{n-1}(a_{1n}^{(0)}\xi_0 + ... + a_{1n}^{(3)}\xi_3) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_0(a_{m1}^{(0)}\xi_0 + ... + a_{m1}^{(3)}\xi_3) + ... + y_{n-1}(a_{mn}^{(0)}\xi_0 + ... + a_{mn}^{(3)}\xi_3) \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11}^{(0)}y_0 + ... + a_{1n}^{(0)}y_{n-1} & \cdot\ \cdot & a_{11}^{(3)}y_0 + ... + a_{1n}^{(3)}y_{n-1} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{m1}^{(0)}y_0 + ... + a_{mn}^{(0)}y_{n-1} & \cdot\ \cdot & a_{m1}^{(3)}y_0 + ... + a_{mn}^{(3)}y_{n-1} \end{pmatrix}}_{=:A^*_{(y_0,...,y_{n-1})}} \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

$A^*_{(y_0,...,y_{n-1})}$ ist dann bei veränderlichen $y_0, ..., y_{n-1}$ eine $m \times 4$ Matrix mit linearen Einträgen in $R = \Bbbk[y_0, ..., y_{n-1}]$, welche wir den *Flip* von $A_{(\partial_0,...,\partial_3)}$ nennen. $A^*_{(y_0,...,y_{n-1})}$ induziert dann auch eine Abbildung $A^*_{(y_0,...,y_{n-1})} : R^4 \to R^m$ bzw. einen Vektorraumhomomorphismus $A^*_{(\eta_0,...,\eta_{n-1})} : \Bbbk^4 \to \Bbbk^m$ für feste Werte $\eta_0, ..., \eta_{n-1} \in \Bbbk$. Wir wollen nun dieses Ergebnis auf die Einschränkung $\phi'_3 : T^8(-5) \to T^{18}(-4)$ der in der freien Auflösung von A^F

$$\mathbf{L}:\ 0 \leftarrow A^F \stackrel{\phi_0}{\leftarrow} T \stackrel{\phi_1}{\leftarrow} T^2(-2) \oplus T^8(-3) \stackrel{\phi_2}{\leftarrow} T^{18}(-4) \stackrel{\phi_3}{\leftarrow}$$

$$\stackrel{\phi_3}{\leftarrow} T^8(-5) \oplus T^2(-6) \stackrel{\phi_4}{\leftarrow} T(-8) \leftarrow 0$$

vorkommenden Abbildung ϕ_3 anwenden. ϕ_3' kann durch eine 18×8 Matrix $B_{(\partial_0,...,\partial_3)}$ mit linearen Einträgen in $\mathbb{k}[\partial_0, ..., \partial_3]$ dargestellt werden. Mit $B^*_{(y_0,...,y_7)}$ bezeichnen wir dann den Flip von $B_{(\partial_0,...,\partial_3)}$, der eine 18×4 Matrix mit linearen Einträgen in $\mathbb{k}[y_0, ..., y_7]$ ist.

3.4.1. *Lemma.* *Sei* $\tilde{E} := V(\text{ann coker } (B^*_{(y_0,...,y_7)})) \subset \mathbb{P}^7$ *und* $E = V(q_1, q_2)$, *wobei* q_1 *und* q_2 *die beiden quadratischen Erzeuger von* $f^\perp$ *bzw.* I_Γ *sind, dann existiert ein Isomorphismus* $\delta : E \to \tilde{E}$.

Beweis. Sei $p = (\xi_0 : ... : \xi_3)$ $(= V(\xi_0 x_0 + ... + \xi_3 x_3))$ ein beliebiger Punkt in $\check{\mathbb{P}}^3$, dann erhält man nach Lokalisation von $\mathbf{L}$ in p, unter Beachtung von $A_p^F = 0$, den exakten Komplex:

$$\mathbf{L}_p : 0 \leftarrow T_p \stackrel{\phi_{1p}}{\leftarrow} T_p^2(-2) \oplus T_p^8(-3) \stackrel{\phi_{2p}}{\leftarrow} T_p^{18}(-4) \stackrel{\phi_{3p}}{\leftarrow}$$

$$\stackrel{\phi_{3p}}{\leftarrow} T_p^8(-5) \oplus T_p^2(-6) \stackrel{\phi_{4p}}{\leftarrow} T_p(-8) \leftarrow 0$$

$\mathbf{L}_p$ stellt also eine freie Auflösung der 0 dar und ist somit trivial ([Eisenbud] Lemma 20.1), d.h. eine direkte Summe von Komplexen der Form

$$0 \to A \stackrel{1}{\to} A \to 0 \to 0 \to ... \quad \text{mit einem Ring } A$$

Ein solcher Komplex bleibt auch nach Tensorierung mit $\kappa(p)$, dem Restklassenkörper von T in p, exakt:

$$\mathbf{L(p)} := L_p \otimes \kappa(p) \ \ : \ \ 0 \leftarrow \mathbb{k} \stackrel{\phi_1^{(p)}}{\leftarrow} \mathbb{k}^2 \oplus \mathbb{k}^8 \stackrel{\phi_2^{(p)}}{\leftarrow} \mathbb{k}^{18} \stackrel{\phi_3^{(p)}}{\leftarrow} \mathbb{k}^8 \oplus \mathbb{k}^2 \stackrel{\phi_4^{(p)}}{\leftarrow} \mathbb{k} \leftarrow 0$$

$\mathbf{L(p)}$ geht also aus $\mathbf{L}$ hervor, indem wir in den Matrizen, welche die Abbildungen ϕ_i bestimmen, $\partial_0, ..., \partial_3$ durch $\xi_0, ..., \xi_3$ ersetzen und damit die Vektorraumhomomorphismen $\phi_i^{(p)}$erhalten, d.h. $\mathbf{L(p)}$ ergibt sich durch "Einsetzen des Punktes" $p = (\xi_0 : ... : \xi_3)$ in $\mathbf{L}$. $\mathbf{L}$ ist selbstdual, somit werden beim Einsetzen eines Punktes $p \in E$ sowohl die beiden quadratischen Erzeuger von Im ϕ_1, durch die E bestimmt ist, als auch die quadratischen Terme des Erzeugers von Im ϕ_4 gleich 0. $\phi_4^{(p)}$ wird also durch eine 10×1 Matrix der Form $\begin{pmatrix} * & ... & * & | & 0 & 0 \end{pmatrix}^t$ repräsentiert. Der Vektorraumhomomorphismus $\phi_3^{(p)} : \mathbb{k}^8 \oplus \mathbb{k}^2 \to \mathbb{k}^{18}$ hat folglich 1-dimensionalen Kern $\ker(\phi_3^{(p)}) = \langle(\eta_0, ..., \eta_7, 0, 0)^t\rangle$, d.h. die Matrix $B_{(\xi_0,...,\xi_3)}$ aus 3.3. besitzt 1-dimensionalen Kern $\ker B_{(\xi_0,...,\xi_3)} = \langle(\eta_0, ..., \eta_7)^t\rangle$. Damit hat $B^*_{(y_0,...,y_7)}$, der Flip von $B_{(\partial_0,...,\partial_3)}$, für $(y_0, ..., y_7) = \lambda(\eta_0, ..., \eta_7)$, $\lambda \in \mathbb{k}$ beliebig, einen nichttrivialen Kern, der $(\xi_0, ..., \xi_3)^t$ enthält. $B^*_{(\eta_0,...,\eta_7)}$ hat also Rang ≤ 3, und somit ist wegen $V(\text{ann coker } B^*_{(y_0,...,y_7)}) = V(I_4(B^*_{(y_0,...,y_7)}))$ ([Eisenbud] Prop. 20.7): $(\eta_0 : ... : \eta_7) \in V(\text{ann coker } B^*_{(y_0,...,y_7)})$.

Wir erhalten folglich eine Abbildung $\delta : E \to \tilde{E}$ indem wir dem Punkt $p = (\xi_0 : ... : \xi_3) \in E$ den Punkt $q = (\eta_0 : ... : \eta_7) \in \mathbb{P}^7$ zuordnen. Für $p \in E$ ist rang $B_{(\xi_0,...,\xi_3)} = 8 - 1 = 7$. Innerhalb einer Zariski-offenen Menge U von p besitzt $B_{(\xi_0,...,\xi_3)}$ also eine 7×7 Untermatrix, deren Determinante auf U nicht verschwindet. Die Einträge $\eta_0, ..., \eta_7$ der Nullstelle $(\eta_0, ..., \eta_7)^t \in \ker B_{(\xi'_0,...,\xi'_3)}$, $(\xi'_0 : ... : \xi'_3) \in U \cap E$, lassen sich mit Hilfe der Cramerschen Regel als Quotient zweier homogener Polynome gleichen Grades (Grad 7) in $\xi'_0, ..., \xi'_3$ darstellen. Den Nenner dieses Quotienten stellt die Determinante der 7×7 Matrix von $B_{(\xi'_0,...,\xi'_3)}$, welche auf U vollen Rang besitzt. δ beschreibt demnach einen Morphismus von E nach $\tilde{E}$. Uns bleibt also noch zu zeigen, daß δ auch eine Umkehrung $\delta^{-1} : \tilde{E} \to E$ besitzt.

Sei dazu $q = (\eta_0 : ... : \eta_7) \in \tilde{E}$ gegeben und damit: rang $B^*_{(\eta_0,...,\eta_7)} \leq 3$. Somit gibt es ein nichttriviales Element $(\xi_0, ..., \xi_3)^t \in \ker B^*_{(\eta_0,:...,\eta_7)}$. Aus $B^*_{(\eta_0:...:\eta_7)} \cdot (\xi_0, ..., \xi_3)^t = 0$ erhalten wir mit Hilfe von 3.3., daß $B_{(\xi_0,...,\xi_3)} \cdot (\eta_0, ..., \eta_7)^t = 0$. Mit $p := (\xi_0 : ... : \xi_3)$ gilt wegen $\dim \ker \phi_3^{(p)} = 1$, daß $\ker \phi_3^{(p)} = \langle(\eta_0, ..., \eta_7, 0, 0)^t\rangle$ und damit Im $\phi_4^{(p)} \subset \mathbb{k}^8 \oplus 0$. Die beiden quadratischen Terme des Erzeugers von Im ϕ_4 werden also beim Ersetzen von $\partial_0, ..., \partial_3$ durch $\xi_0, ..., \xi_3$ gleich 0, also muß p auf E liegen. Wir definieren folglich $\delta^{-1}(q) := p$.

Diese Abbildung ist wohldefiniert: Angenommen, es gäbe noch ein weiteres Element $(\tilde{\xi}_0, ..., \tilde{\xi}_3)^t \in \ker B^*_{(\eta_0,...,\eta_7)} \setminus \langle(\xi_0, ..., \xi_3)^t\rangle$, dann würde auch die Gerade durch p und $\tilde{p} := (\tilde{\xi}_0 : ... : \tilde{\xi}_3)$ auf E liegen. Da E vollständiger

Durchschnitt von zwei irreduziblen Quadriken ist, erhalten wir einen Widerspruch. Wie oben sehen wir, daß δ^{-1} einen Morphismus definiert.

Darüber hinaus gilt offensichtlich, daß $\delta \circ \delta^{-1} = \delta^{-1} \circ \delta = id.\Box$

3.4.2. *Lemma.* *Es existieren zwei lineare Unterräume* $L_1, L_2 \cong \mathbb{P}^3$ in $\mathbb{P}^7$, *so daß* L_1,L_2 *jeweils genau die 8 Punkte* $\delta(\Gamma_1)$ bzw. $\delta(\Gamma_2)$ *mit der elliptischen Kurve* $\tilde{E}$ *gemeinsam haben. Darüber hinaus gilt:* $\deg \tilde{E} = 12$.

Beweis. Seien $\mathbf{F}_1$ bzw. $\mathbf{F}_2$ die minimal freien Auflösungen von T/I_{Γ_1} bzw. T/I_{Γ_2}, die nach 3.1. jeweils folgende Darstellung besitzen $(i = 1, 2)$:

$$\mathbf{F}_i: \ 0 \leftarrow T/I_\Gamma \overset{\theta_{i,0}}{\leftarrow} T \overset{\theta_{i,1}}{\leftarrow} T^2(-2) \oplus T^4(-3) \overset{\theta_{i,2}}{\leftarrow} T^9(-4) \overset{\theta_{i,3}}{\leftarrow} T^4(-5) \leftarrow 0$$

$$\textit{Syzygientableau von } \mathbf{F}_i: \qquad \begin{array}{cccc} 1 & - & - & - \\ - & 2 & - & - \\ - & 4 & 9 & 4 \end{array}$$

$\theta_{i,3}$ wird durch eine $9{\times}4$ Matrix $C^{(i)}_{(\partial_0,\ldots,\partial_3)}$ mit linearen Einträgen in $\mathbb{k}[\partial_0, \ldots, \partial_3]$ repräsentiert. Den zugehörigen Flip bezeichnen wir mit $C^{*(i)}_{(y_0,\ldots,y_7)}$. Lokalisation von $\mathbf{F}_i$ in einem Punkt $p = (\xi_0 : \ldots : \xi_3) = V(\xi_0 x_0 + \ldots + \xi_3 x_3) \in \check{\mathbb{P}}^3$ und anschließende Tensorierung mit $\kappa(p)$ liefert einen Komplex

$$\mathbf{F}_i(p) = (\mathbf{F}_i)_p \otimes \kappa(p):$$

$$0 \leftarrow (T/I_\Gamma)_p \otimes \kappa(p) \overset{\theta^{(p)}_{i,0}}{\leftarrow} \mathbb{k} \overset{\theta^{(p)}_{i,1}}{\leftarrow} \mathbb{k}^2 \oplus \mathbb{k}^4 \overset{\theta^{(p)}_{i,2}}{\leftarrow} \mathbb{k}^9 \overset{\theta^{(p)}_{i,3}}{\leftarrow} \mathbb{k}^4 \leftarrow 0$$

der für $p \notin \Gamma_i$ exakt ist. $\mathbf{F}_i(p)$ geht aus $\mathbf{F}_i$ analog wie oben durch Einsetzen von p hervor. Ersetzt man $\partial_0, \ldots, \partial_3$ durch $\xi_0, \ldots, \xi_3$, so erhalten wir für $k = 0, \ldots, 3$ aus den Abbildungen $\theta_{i,k}$ die $\mathbb{k}-$Vektorraumhomomorphismen $\theta^{(p)}_{i,k}$, welche durch die Matrizen $C^{(i)}_{(\xi_0,\ldots,\xi_3)}$ repräsentiert werden. Da T/I_{Γ_i} Cohen-Macaulay ist, gilt *depth* $I(\theta_{i,1}) =$ *depth* $I_{\Gamma_i} = \dim I_{\Gamma_i} = 1$ und somit (Eisenbud Cor. 20.12):

$$\text{rad } I_{\Gamma_i} = \text{rad } I(\theta_{i,1}) = \text{rad } I(\theta_{i,2}) = \text{rad } I(\theta_{i,3}) = \text{rad } I_4(\theta_{i,3})$$

$$\Rightarrow V(\text{ann coker } {}^tC^{(i)}_{(\partial_0,\ldots,\partial_3)}) = V(I_4(C^{(i)}_{(\partial_0,\ldots,\partial_3)})) = V(I_{\Gamma_i}) = \Gamma_i$$

Folglich hat $C^{(i)}_{(\xi_0,\ldots,\xi_3)}$ genau dann nichttrivialen Kern, wenn $(\xi_0 : \ldots : \xi_3) \in \Gamma_i$. Wegen $I_{\Gamma_1}, I_{\Gamma_2} \subset A^F$ enthält die minimal freie Auflösung $\mathbf{L}$ von A^F die Komplexe $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ als Unterkomplexe. Es lassen sich also invertierbare Matrizen $P^{(i)} \in GL(18, \Bbbk)$ und $Q^{(i)} \in GL(8, \Bbbk)$ angeben mit

$$P^{(i)} B_{(\partial_0,\ldots,\partial_3)} Q^{(i)} = \begin{pmatrix} C^{(i)}_{(\partial_0,\ldots,\partial_3)} & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

Seien nun, bei festem i, $(\eta_0, \ldots, \eta_3)^t, (\tilde{\eta}_0, \ldots, \tilde{\eta}_3)^t \in \ker C^{(i)}_{(\xi_0,\ldots,\xi_3)}$ für $p = (\xi_0 : \ldots : \xi_3) \in \Gamma_i$, dann gilt:

$$0 = B_{(\xi_0,..,\xi_3)} Q^{(i)} \cdot (\eta_0, \ldots, \eta_3, 0, .., 0)^t = B_{(\xi_0,..,\xi_3)} Q^{(i)} \cdot (\tilde{\eta}_0, .., \tilde{\eta}_3, 0, .., 0)^t$$

$$\Rightarrow Q^{(i)} \cdot (\eta_0, .., \eta_3, 0, .., 0)^t\, ,\ Q^{(i)} \cdot (\tilde{\eta}_0, .., \tilde{\eta}_3, 0, .., 0)^t \in \ker B_{(\xi_0,..,\xi_3)}$$

Wegen $\dim \ker B_{(\xi_0,..,\xi_3)} = 1$ müssen $(\eta_0, \ldots, \eta_3)^t$ und $(\tilde{\eta}_0, \ldots, \tilde{\eta}_3)^t$ linear abhängig sein, also ist dim $\ker C^{(i)}_{(\xi_0,\ldots,\xi_3)} = 1$, $p = (\xi_0 : \ldots : \xi_3) \in \Gamma_i$ und dim $\ker C^{(i)}_{(\xi_0,\ldots,\xi_3)} = 0$ für alle Punkte $p = (\xi_0 : \ldots : \xi_3) \notin \Gamma_i$.

Wir zeigen, daß alle Punkte aus Γ_i vermöge der oben eingeführten Abbildung δ in einen 3 dimensionalen linearen Unterraum $L_i \subset \mathbb{P}^7$ abgebildet werden: Sei dazu $p = (\xi_0 : \ldots : \xi_3) \in \Gamma_i$, dann zeigen obige Ausführungen, daß $\ker C^{(i)}_{(\xi_0,\ldots,\xi_3)} = \langle (\eta_0, \ldots, \eta_3)^t \rangle$ und damit $\ker B_{(\xi_0,..,\xi_3)} = \langle Q^{(i)} \cdot (\eta_0, \ldots, \eta_3, 0, \ldots, 0)^t \rangle$. Daraus folgern wir:

$$\delta(\Gamma_i) \subset Q^{(i)}(\Bbbk^4 \oplus 0)/ \sim =: L_i$$

wobei $(w_0, ..., w_7)^t \sim (\tilde{w}_0, ..., \tilde{w}_7)^t :\Leftrightarrow (w_0, ..., w_7)^t = \lambda(\tilde{w}_0, ..., \tilde{w}_7)^t$ für ein $\lambda \in \mathbb{k}$. L_i ist also ein 3 dimensionaler linearer Unterraum in $\mathbb{P}^7$. Sei nun $q = (\eta_0 : ... : \eta_7) \in (L_i \cap \tilde{E}) \setminus \delta(\Gamma_i)$, d.h. $(\eta_0, ..., \eta_7)^t = Q^{(i)} \cdot (\tilde{\eta}_0, ..., \tilde{\eta}_3, 0, ..., 0)^t$ und somit $B_{(\xi_0,..,\xi_3)} Q^{(i)} \cdot (\tilde{\eta}_0, .., \tilde{\eta}_3, 0, .., 0)^t = 0$ für $p = (\xi_0 : ... : \xi_3) = \delta^{-1}(q)$. Dann ist $(\tilde{\eta}_0, ..., \tilde{\eta}_3)^t \in \ker C^{(i)}_{(\xi_0,...,\xi_3)}$, woraus $p \in \Gamma_i$ und damit auch $q \in \delta(\Gamma_i)$ folgt. L_i hat somit mit $\tilde{E}$ genau die 8 Punkte $\delta(\Gamma_i)$ gemeinsam.

Es bleibt noch der Grad von $\tilde{E}$ zu bestimmen: Wir wissen bereits, daß es einen 3 dimensionalen linearen Unterraum, o.E. sei dies L_1, in $\mathbb{P}^7$ gibt, der mit $\tilde{E}$ genau 8 Punkte gemeinsam hat. Geben wir uns 3 beliebige zusätzliche Punkte auf $\tilde{E}$ vor, so können wir durch diese und die 8 anderen eine Hyperbene $H \subset \mathbb{P}^7$ legen, die L_1 enthält. Dies liefert uns eine erste Abschätzung: $\deg \tilde{E} \geq 11$.
Seien nun $q, r \in \tilde{E} \setminus L_1$ zwei feste Punkte auf $\tilde{E}$ und $G \cong \mathbb{P}^1$ eine Gerade in $\mathbb{P}^7$, die weder in L_1 liegt noch einen Punkt mit $\tilde{E}$ gemeinsam hat. Ist $s \in G$ ein Punkt auf der Geraden G, so läßt sich eine Hyperbene H_s durch die 11 Punkte $\{q, r, s\} \cup \delta(\Gamma_1)$ legen. Angenommen, $\deg \tilde{E} = 11$, dann hätte H_s zusätzlich zu den 10 Punkten $\{q, r\} \cup \delta(\Gamma_1)$ genau einen weiteren Schnittpunkt $P_s \in H_s \cap \tilde{E}$ mit $\tilde{E}$. Durch die Abbildung $\gamma : G \to \tilde{E}$, welche $s \in G$ den Punkt P_s zuordnet, wäre somit eine $\mathbb{P}^1$- Parametrisierung der elliptischen Kurve $\tilde{E}$ gegeben, also Widerspruch. Es folgt: $\deg \tilde{E} \geq 12$. Die Berechnung von $\deg \tilde{E}$ in einem Beispiel für f ergibt wie behauptet:
$\deg \tilde{E} = 12$. Ein Halbstetigkeitsargument liefert dann die Richtigkeit der Aussage im allgemeinen Fall (siehe Anhang A.1.-A.2. und C.2.).$\square$

4. Konstruktion der Darstellungen

Wir werden nun zeigen, daß die elliptische Kurve $\tilde{E} \cong E$ aus 3.4.1. auf einer Regelfläche $\pi : X \to E$ über E mit Schnitten $E_1, E_2, \tilde{E}$ liegt. Die Berechnung der minimal freien Auflösung des homogenene Koordinatenrings von X enthält schließlich die notwendigen Informationen, um I_{Γ_1} bzw. I_{Γ_2} angeben zu können.

4.0. Sei $f = l_1^4 + ... + l_8^4$ mit Linearformen $l_i \in \Bbbk[x_0, ..., x_3]_1$ bzw. $p_i = V(l_i) \in \check{\mathbb{P}}^3$, $\Gamma_1 = \{p_1, ..., p_8\}$ Punkte in allgemeiner Lage. Nach Satz 2.2.0 gibt es dann genau eine weitere Darstellung $f = \tilde{l}_1^4 + ... + \tilde{l}_8^4$ mit $\tilde{l}_i \in \Bbbk[x_0, ..., x_3]_1$ bzw. $\tilde{p}_i = V(\tilde{l}_i) \in \check{\mathbb{P}}^3$, $\Gamma_2 = \{\tilde{p}_1, ..., \tilde{p}_8\}$. Die Punkte $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ liegen alle auf einer durch f eindeutig bestimmten elliptischen Kurve E, die aus dem Schnitt der beiden zu f apolaren Quadriken hervorgeht. Nach Lemma 3.4.1 und 3.4.2 ist E vermöge der im vorigen Kapitel definierten Abbildung $\delta : E \to \tilde{E}$ isomorph zu einer elliptischen Kurve $\tilde{E} \subset \mathbb{P}^7$ vom Grad 12, die mit den zwei linearen Unterräumen $L_1, L_2 \cong \mathbb{P}^3$ aus 3.4.2 jeweils genau die 8 Punkte $\Omega_1 := \delta(\Gamma_1)$ bzw. $\Omega_2 := \delta(\Gamma_2)$ gemeinsam hat.

Betrachten wir zunächst die Projektion $\pi_1 : \tilde{E} \to L_2$ der Kurve $\tilde{E}$ von L_1 auf L_2. Diese Abbildung ist in den 8 Punkten Ω_1 zunächst nicht definiert. Durch Abschluß von $\pi_1(\tilde{E} \backslash \Omega_1))$ kann π_1 aber auf ganz $\tilde{E}$ fortgesetzt werden. Die Projektion $\pi_2 : \tilde{E} \to L_1$ von L_2 auf L_1 sei analog definiert.

Ist $\tilde{q}$ ein Punkt auf $\tilde{E}$, so gibt es einen linearen Unterraum $A_i \cong \mathbb{P}^4$, $i = 1, 2$, der sowohl $\tilde{q}$ als auch L_i enthält. A_1 und A_2 schneiden sich in einer gemeinsamen Geraden $G_{\tilde{q}}$, die $\tilde{q}$,$\pi_1(\tilde{q}), \pi_2(\tilde{q})$ enthält.

Sei $H \subset \mathbb{P}^7$ eine Hyperebene, die L_1 enthält, aber keine der Geraden durch $\tilde{q}$ und $\pi_1(\tilde{q})$ für alle $\tilde{q} \in \Omega_1$. H hat dann mit $\tilde{E}$ außer Ω_1 noch genau 4 Punkte $\Omega = \{q_1, ..., q_4\}$ gemeinsam ($\deg \tilde{E} = 12$). Die Projektion $\pi_1(\Omega)$ dieser 4 Punkte auf L_2 liegt auf dem Schnitt $H \cap L_2 \cap \pi_1(\tilde{E})$. Umgekehrt gibt es zu jedem Punkt $q \in H \cap L_2 \cap \pi_1(\tilde{E})$ einen Urbildpunkt $\tilde{q} \in \tilde{E} \backslash \Omega_1$ bezüglich π_1, der auch Element von H ist. Demnach ist $H \cap L_2 \cap \pi_1(\tilde{E}) = \pi_1(\Omega)$. $H \cap L_2$ liefert uns also eine Hyperebene in $L_2 \cong \mathbb{P}^3$, die mit der Projektion $E_2 := \pi_1(\tilde{E})$ genau 4 Punkte gemeinsam hat. E_2 ist somit eine Kurve in $L_2 \cong \mathbb{P}^3$ vom Grad 4.

Eine Hyperebene W in L_2 ist durch Angabe von drei Punkten auf L_2 eindeutig bestimmt, also gibt es eine Hyperebene H_W in $\mathbb{P}^7$, die L_1 und W enthält. Für alle Punkte $\tilde{q} \in \tilde{E}$ mit $\pi_1(\tilde{q}) \in W \cap E_2$, enthält folglich H_W auch alle Geraden durch $\tilde{q} \in \tilde{E}$ und $q = \pi_1(\tilde{q})$. Sei $q \in E_2 \setminus \pi_1(\Omega_1)$ beliebig gewählt, $W \subset L_2 \setminus \pi_1(\Omega_1)$ eine Hyperbene, die q enthalte und

$W \cap E_1 = \{q, r, s, t\}$, dann hat $H_W \cap E$ außer Ω_1 noch alle Urbildpunkte von q, r, s, t bezüglich der Projektion π_1 mit $\tilde{E}$ gemeinsam. Wegen $H_W \,.\, \tilde{E} = 12$ sind die Urbildpunkte also eindeutig bestimmt. Da q beliebig auf E_2 gewählt war, folgt $\tilde{E} \overset{\pi_1}{\cong} E_2$.
E_2 ist also eine elliptische Kurve auf $L_2 \cong \mathbb{P}^3$ vom Grad 4. Für $E_1 := \pi_2(\tilde{E})$ gelten dann analoge Aussagen, d.h. E_1 ist eine elliptische Kurve auf $L_1 \cong \mathbb{P}^3$ vom Grad 4 mit $\tilde{E} \overset{\pi_2}{\cong} E_1$.

Die Vereinigung $X := \bigcup_{q \in \tilde{E}} G_q$ aller Geraden durch $q \in \tilde{E}$, $\pi_1(q)$ und $\pi_2(q)$ definiert uns eine Regelfläche $\pi : X \to E$ über E mit Schnitten E_1, E_2 und $\tilde{E}$. Sei mit H fortan eine allgemeine Hyperbene in $\mathbb{P}^7$ bezeichnet, dann gilt mit den zwei invertierbaren Garben $\mathcal{L}_1 := \pi_1^* \mathcal{O}_{L_2}(1) \cong \mathcal{L}(H - \Omega_1)$ bzw. $\mathcal{L}_2 := \pi_2^* \mathcal{O}_{L_1}(1) \cong \mathcal{L}(H - \Omega_2)$ vom Grad 4, daß

$$X \cong \mathbb{P}\left(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2\right)$$

und $\mathbb{P}(\mathcal{L}_i) \cong E_i \subset X$. Anwendung von Riemann-Roch liefert uns:

$$\dim\, H^0(\mathcal{O}_X(H)) = \dim\, H^0(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2) = \dim H^0(\mathcal{L}_1) + \dim H^0(\mathcal{L}_2) = 8$$

Demnach ist die Einbettung $\iota : X \overset{|H|}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^7$ durch das vollständige Linearsystem $|H|$ gegeben. Der folgende Satz zeigt, daß diese Einbettung projektiv normal ist:

4.1. Satz. *Sei $\pi : X \to E$ die in 4.0. definierte Regelfläche mit Schnitten E_1 und E_2 , $\iota : X \overset{|H|}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^7$ die Einbettung in $\mathbb{P}^7$ und R_X der zugehörige homogene Koordinatenring, $R = \Bbbk[y_0, ..., y_7]$ der homogene Koordinatenring von $\mathbb{P}^7$. Dann gilt:*

a) $\iota : X \overset{|H|}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^7$ *ist projektiv normal.*

b) $\mathcal{L}_1 \ncong \mathcal{L}_2$ *und* $I_X = (I_{\tilde{E}})_2$

c) *Die minimal freie Auflösung* $\boldsymbol{F}_{R_X}$ *von* R_X *hat die folgende Form:*

$$\mathbf{F}_{R_X} : \qquad 0 \leftarrow R_X \overset{\vartheta_0}{\leftarrow} R \overset{\vartheta_1}{\leftarrow} R^{12}(-2) \overset{\vartheta_2}{\leftarrow} R^{24}(-3) \oplus R^2(-4) \overset{\vartheta_3}{\leftarrow}$$

$$\overset{\vartheta_3}{\leftarrow} R^{12}(-4) \oplus R^{16}(-5) \overset{\vartheta_4}{\leftarrow} R^{20}(-6) \overset{\vartheta_5}{\leftarrow} R^8(-7) \overset{\vartheta_6}{\leftarrow} R(-8) \leftarrow 0$$

mit zugehörigem Syzygientableau:

1	–	–	–	–	–	–
–	12	24	12	–	–	–
–	–	2	16	20	8	1

Beweis.

In *b)* werden wir zeigen, daß $\mathcal{L}_1 \ncong \mathcal{L}_2$ für allgemeines f. Dennoch müssen wir einige Aussagen für den Fall $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$ treffen. Diese werden insbesondere im Beweis von *a)* benötigt. Seien also mit $x_0, ..., x_3$ bzw. w_0, w_1 die homogenen Koordinaten in $\mathbb{P}^3$ bzw. $\mathbb{P}^1$ bezeichnet. Unter der Annahme $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$ wäre $X \cong \mathbb{P}(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2) \cong \tilde{E} \times \mathbb{P}^1 \cong E \times \mathbb{P}^1$. X ist dann vermöge der Segre Einbettung $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^7$,

$$(x_0 : ... : x_3) \times (w_0 : w_1) \to (x_0w_0 : x_1w_0 : ... : x_3w_1) = (y_0 : ... : y_7)$$

eine Varietät in $\mathbb{P}^7$.

$\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1$ wird als Varietät in $\mathbb{P}^7$ von den sechs 2×2-Minoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 \\ y_4 & y_5 & y_6 & y_7 \end{pmatrix}$$

erzeugt. Das Syzygientableau der minimal freien Auflösung $\mathbf{F}_{R_{\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1}}$ des homogenen Koordinatenrings $R_{\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1}$ von $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^7$ hat dann folgende Form (siehe Rechnung im Anhang C.3.):

$$\begin{array}{cccc} 1 & - & - & - \\ - & 6 & 8 & 3 \end{array}$$

Die Erzeugenden $w_0^2, w_0 w_1, w_1^2$ von $\mathbb{k}\,[w_0, w_1]_2$ haben genau die zwei Syzygien $(-w_1, w_0, 0)$ und $(0, -w_1, w_0)$. Seien $s_1, ..., s_8 \in R^3$ die durch Bihomogenisierung von $(-w_1, w_0, 0)$ und $(0, -w_1, w_0)$ erhaltenen Syzygien und $N \subset R^3$ das durch sie erzeugte Untermodul. Eine Rechnung (siehe Anhang C.3.) zeigt, daß die minimal freie Auflösung von N folgende Form hat:

$$\begin{array}{ccc} 8 & 6 & - \\ - & - & 1 \end{array}$$

E ist Schnitt der Verschwindungsmengen zweier quadratischer Formen $q_1, q_2 \in \mathbb{k}[x_0, ..., x_3]$. Die sechs 2-Formen $q_i w_0^2, q_i w_0 w_1, q_i w_1^2$ liefern uns folglich unabhängige Erzeuger $q_1^{(i)}, ..., q_3^{(i)} \in \mathbb{k}[y_0, ..., y_7]$ des Verschwindungsideals von $E \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^7$. Sei i fest und $J_i = \left(q_1^{(i)}, ..., q_3^{(i)}\right) \subset \mathbb{k}[y_0, ..., y_7]$ das von $q_1^{(i)}, ..., q_3^{(i)}$ erzeugte Ideal, dann ist die minimal freie Auflösung $\mathbf{L}_i$ von J_i gegeben durch:

$$\mathbf{L}_i : \qquad \begin{array}{cccc} 3 & 8 & 6 & - \\ - & - & - & 1 \end{array}$$

Da q_1, q_2 unabhängig sind, sind auch $\mathbf{L}_1$ und $\mathbf{L}_2$ unabhängig. Die minimal freie Auflösung $\mathbf{F}_{R_X}$ des homogenen Koordinatenringes R_X von X enthält damit die unabhängigen Komplexe $\mathbf{F}_{R_{\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^1}}$, $\mathbf{L}_1$ und $\mathbf{L}_2$ als Unterkomplexe.

Für das zugehörige Syzygientableau gilt somit $\beta_{34} \geq 15 = 3 + 2 \cdot 6$. Darüber hinaus zeigen die obigen Ausführungen, daß X als Schnitt von genau 12 Quadriken hervorgeht.

Bemerkung. Unter Verwendung der Methoden in [Schreyer, 1986] läßt sich das Syzygienzableau zu $\mathbf{F}_{R_X}$ für $X \cong E \times \mathbb{P}^1$ auch vollständig angeben:

$$\mathbf{F}_{R_X}: \qquad \begin{array}{ccccccc} 1 & - & - & - & - & - & - \\ - & 12 & 24 & 15 & - & - & - \\ - & - & 5 & 16 & 19 & 8 & 1 \end{array}$$

a) Mit $\mathcal{J}_X$ sei die Idealgarbe von X bezüglich der Einbettung $\iota : X \overset{|H|}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^7$, d.h. $\mathcal{J}_X = \ker(\iota^\# : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^7} \to \iota_* \mathcal{O}_X)$, bezeichnet. Das Verschwindungsideal der Einbettung von X in $\mathbb{P}^7$ ist dann durch $I_X = \Gamma^* \mathcal{J}_X = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} H^0 \mathcal{J}_X(d)$ gegeben ([Hartshorne] 5.16.a)). $R_X = R/I_X$ sei der homogene Koordinatenring von X. Für alle $d > 0$ gilt dann:

$$H^0(\iota_* \mathcal{O}_X(d)) \cong H^0(\mathcal{O}_X(d)) \cong$$

$$\cong H^0(\pi_* \mathcal{O}_X(d)) = H^0(Sym_d(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2)) =$$

$$= H^0(\mathcal{L}_1^d \oplus (\mathcal{L}_1^{d-1} \otimes \mathcal{L}_2) \oplus ... \oplus \mathcal{L}_2^d) \cong H^0(\mathcal{L}_1^d) \oplus ... \oplus H^0(\mathcal{L}_2^d)$$

und folglich dim $H^0(\iota_* \mathcal{O}_X(d)) = 4d(d+1)$.
Betrachten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathcal{J}_X(d) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^7}(d) \to \iota_* \mathcal{O}_X(d) \to 0$$

bzw. den dadurch induzierten langen Cohomologiekomplex

$$0 \to H^0 \mathcal{J}_X(d) \to H^0 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^7}(d) \to H^0(\iota_* \mathcal{O}_X(d)) \to H^1 \mathcal{J}_X(d) \to ...$$

so sehen wir, daß $\iota : X \overset{|H|}{\hookrightarrow} \mathbb{P}^7$ genau dann projektiv normal ist, wenn

$$\text{(1)} \qquad \dim H^0 \mathcal{J}_X(d) = \binom{7+d}{d} - 4d(d+1)$$

Dies ist wiederum äquivalent zu

$$\text{(2)} \qquad Sym_d H^0 \mathcal{O}_X(1) \twoheadrightarrow H^0 \mathcal{O}_X(d)$$

$$\Longleftrightarrow Sym_d H^0(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2) \twoheadrightarrow H^0(Sym_d(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2))$$

Durch $\pi_1 : \tilde{E} \hookrightarrow L_2 \cong \mathbb{P}^3$ ist nach 4.0 eine projektiv normale Einbettungen gegeben, also

$$\text{(3)} \qquad H^0(\mathcal{O}_{L_2}(d)) \twoheadrightarrow H^0(\pi_1^* \mathcal{O}_{L_2}(d)), \text{ d.h. } Sym_d H^0(\mathcal{L}_1) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{L}_1^d)$$

Analog erhalten wir auch: $Sym_d H^0(\mathcal{L}_2) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{L}_2^d)$. Insbesondere ergibt sich für $d = 2$ wegen (1), (2) und (3) die folgende Äquivalenz:

$$\text{(4)} \quad H^0(\mathcal{L}_1) \otimes H^0(\mathcal{L}_2) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) \Leftrightarrow \dim\, (I_X)_2 = \binom{9}{2} - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 12$$

Im Fall $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$ ist nach obigen Ausführungen die Surjektivität von $H^0(\mathcal{L}_1) \otimes H^0(\mathcal{L}_2) \to H^0(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2)$ also erfüllt. Für $\mathcal{L}_1 \ncong \mathcal{L}_2$ folgt diese mit Hilfe von Castelnuovos base-point free pencil trick ([Eisenbud] Ex. 17.18): Sei dazu $V \subset H^0(\mathcal{L}_1)$ ein 2 dimensionaler Vektorraum von globalen Schnitten in $H^0(\mathcal{L}_1)$, die $\mathcal{L}_1$ lokal erzeugen, d.h. V ist als Unterbündel von $\mathcal{L}_1$ basispunktfrei. Ein solches ist durch den pullback $\pi_1^* s_1$ bzw. $\pi_1^* s_2$ zweier Hyperebenenschnitte $s_1, s_2 \in \mathcal{O}_{L_2}(1)$, die sich auf E_1 nicht schneiden, gegeben. Wir betrachten nun folgenden exakten Komplex

$$0 \to \mathcal{L}_1^{-1} \to V \otimes \mathcal{O}_{\tilde{E}} \to \mathcal{L}_1 \to 0$$

der, aufgrund der Isomorphie $\mathcal{L}_1|_U, \mathcal{L}_2|_U \cong \mathcal{O}_{\tilde{E}}|_U$ in einer lokalen Karte U, bei Tensorierung mit $\mathcal{L}_2$ exakt bleibt:

$$0 \to \mathcal{L}_1^{-1} \otimes \mathcal{L}_2 \to V \otimes \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2 \to 0$$

Diese kurze exakte Sequenz induziert einen langen exakten Komplex:

$$0 \to H^0(\mathcal{L}_1^{-1} \otimes \mathcal{L}_2) \to H^0(V \otimes \mathcal{L}_2) \to H^0(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) \to H^1(\mathcal{L}_1^{-1} \otimes \mathcal{L}_2) \to ...$$

Für $\mathcal{L}_1 \ncong \mathcal{L}_2$ ist $\mathcal{L}_1^{-1} \otimes \mathcal{L}_2 \ncong \mathcal{O}_{\tilde{E}}$ und somit erhalten wir wegen $\deg \mathcal{L}_1^{-1} \otimes \mathcal{L}_2 = 0$, daß $\dim H^0(\mathcal{L}_1^{-1} \otimes \mathcal{L}_2) = 0$. Nach Riemann-Roch gilt dann auch $\dim H^1(\mathcal{L}_1^{-1} \otimes \mathcal{L}_2) = \dim H^0(\mathcal{L}_1^{-1} \otimes \mathcal{L}_2) - 1 + g_{\tilde{E}} = 0$. Aus der obigen langen exakten Sequenz ergibt sich also $V \otimes H^0(\mathcal{L}_2) = H^0(V \otimes \mathcal{L}_2) \cong H^0(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2)$ und damit $H^0(\mathcal{L}_1) \otimes H^0(\mathcal{L}_2) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2)$.

Dir Richtigkeit von (2) für $d > 1$ beweisen wir analog durch erneute Anwendung des base-point free pencil tricks: Sei dazu V wie oben, woraus für $k, l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ die Existenz folgender kurzen exakten Sequenz folgt

$$0 \to \mathcal{L}_1^{k-2} \otimes \mathcal{L}_2^l \to V \otimes \mathcal{L}_1^{k-1} \otimes \mathcal{L}_2^l \to \mathcal{L}_1^k \otimes \mathcal{L}_2^l \to 0$$

Diese induziert den langen exakten Komplex

$$0 \to H^0(\mathcal{L}_1^{k-2} \otimes \mathcal{L}_2^l) \to H^0(V \otimes \mathcal{L}_1^{k-1} \otimes \mathcal{L}_2^l) \to H^0(\mathcal{L}_1^k \otimes \mathcal{L}_2^l) \to$$

$$\to H^1(\mathcal{L}_1^{k-2} \otimes \mathcal{L}_2^l) \to H^1(V \otimes \mathcal{L}_1^{k-1} \otimes \mathcal{L}_2^l) \to H^1(\mathcal{L}_1^k \otimes \mathcal{L}_2^l) \to ...$$

Der Fall $k+l-2 = 0 \Leftrightarrow k = l = 1$ wurde bereits behandelt. Für $k+l-2 > 0$ ist durch $\mathcal{L}_1^{k-2} \otimes \mathcal{L}_2^l \ncong \mathcal{O}_{\tilde{E}}$ eine invertierbare Garbe vom Grad $4\,(k-2+l) > 0$ auf $\tilde{E}$ gegeben und folglich $\dim H^1(\mathcal{L}_1^{k-2} \otimes \mathcal{L}_2^l) = \dim H^0(\mathcal{L}_1^{-k+2} \otimes \mathcal{L}_2^{-l}) = 0$. Die Abbildung $H^0(V \otimes \mathcal{L}_1^{k-1} \otimes \mathcal{L}_2^l) \to H^0(\mathcal{L}_1^k \otimes \mathcal{L}_2^l)$ ist demnach surjektiv, also gilt dies auch für $H^0(\mathcal{L}_1) \otimes H^0(\mathcal{L}_1^{k-1} \otimes \mathcal{L}_2^l) \to H^0(\mathcal{L}_1^k \otimes \mathcal{L}_2^l)$. Analog dazu können wir auch zeigen, daß $H^0(\mathcal{L}_2) \otimes H^0(\mathcal{L}_1^k \otimes \mathcal{L}_2^{l-1}) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{L}_1^k \otimes \mathcal{L}_2^l)$. Mit Hilfe vollständiger Induktion nach $k + l - 2$ folgt schließlich $Sym_k H^0(\mathcal{L}_1) \otimes Sym_l H^0(\mathcal{L}_2) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{L}_1^k \otimes \mathcal{L}_2^l)$ und deshalb zusammen mit dem Ergebnis aus (3) die Aussage (2). X wir also vermöge ι projektiv normal in $\mathbb{P}^7$ eingebettet, woraus wir $H^1(\mathcal{J}_X(d)) = 0$ für alle $d > 0$ erhalten. Für die Werte der Hilbertfunktion H_{R_X} von R_X gilt darüber hinaus, unter Beachtung von $(R/I_X)_d = H^0(\iota_* \mathcal{O}_X(d))$, daß $H_{R_X}(d) = 4d(d+1)$.

b) Da $\tilde{E} \subset X$ muß I_X im Verschwindungsideal $I_{\tilde{E}}$ von $\tilde{E}$ enthalten sein. Liegt $\tilde{E}$ auf einer Quadrik Q, so hat Q mit L_i, $i = 1, 2$, wenigstens die 8 Punkte Ω_i gemeinsam. Der Schnitt $Q_i = Q \cap L_i$ ist eine Quadrik auf $L_i \cong \mathbb{P}^3$. Es gibt genau zwei unabhängige Quadriken auf L_i, die Ω_i enthalten. Deren gemeinsamer Schnitt ist E_i, also gilt $E_i \subset Q_i \subset Q$. Damit liegt mit $q \in \tilde{E}$ auch $\pi_1(q)$ und $\pi_2(q)$ auf Q. Folglich liegen auch alle Geraden G_q durch q, $\pi_1(q)$ und $\pi_2(q)$ auf dieser Quadrik (siehe 4.0.). Wegen $X = \bigcup_{q \in \tilde{E}} G_q$ erhalten wir demnach $(I_{\tilde{E}})_2 = (I_X)_2$. $I_{\tilde{E}}$ enthält also genau 12 quadratische Erzeuger.

Das in einem Beispiel für f berechnete $I_{\tilde{E}}$ wird von 12 quadratischen und 12 kubischen Formen erzeugt. In dem gewählten Beispiel hat $R/(I_{\tilde{E}})_2$ das Hilbertpolynom $h_{R/(I_{\tilde{E}})_2}(d) = 4d(d+1)$ $(= H_{R_X}(d))$. $V := V((I_{\tilde{E}})_2)$ und X haben demnach dasselbe Hilbertpolynom, also wird in diesem Beispiel I_X von genau den 12 quadratischen Formen erzeugt. Das Syzygientableau der minimal freien Auflösung von R_X nimmt im betrachteten Beispiel gerade die Form wie in c) an. Unter Verwendung eines Halbstetigkeitsargumentes (siehe Anhang A.1.-A.2. und C.2.), erhalten wir somit, daß für allgemeines f die Bettizahlen β_{ij} der minimal freien Auflösung $\mathbf{F}_{R_X}$ von R_X nur kleiner oder gleich denen in c) sein können. Insbesondere gilt also $\beta_{13} = 0$, $\beta_{45} = 0 \Rightarrow \beta_{56} = \beta_{67} = \beta_{78} = 0$, $\beta_{34} \leq 12$ und $\beta_{24} \leq 2$.

Für $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$ hatten wir eingangs gezeigt, daß $\beta_{34} \geq 15$. Für allgemeines f können wir daher $\mathcal{L}_1 \ncong \mathcal{L}_2$ schließen. Darüber hinaus erhalten wir:

$$(I_{\tilde{E}})_2 = I_X.$$

c) Für $d \in \mathbb{Z}$ betrachten wir den exakten Komplex (siehe a)):

$$0 \to H^0(\mathcal{J}_X(d)) \to H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^7}(d)) \to H^0(\iota_*\mathcal{O}_X(d)) \to \ldots$$

$$\ldots \to H^{i-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^7}(d)) \to H^{i-1}(\iota_*\mathcal{O}_X(d)) \to H^i(\mathcal{J}_X(d)) \to H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^7}(d)) \to \ldots$$

Unter Verwendung der Beziehungen

$$H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^7}(1)) = H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^7}(1)) = 0 \text{ bzw. } H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^7}) = H^3(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^7}) = 0$$

können wir

$$H^2(\mathcal{J}_X(3-2)) \cong H^1(\iota_*\mathcal{O}_X(3-2)) \cong H^1(\mathcal{O}_X(3-2)) \cong$$

$$\cong H^1(\pi_*\mathcal{O}_X(1)) = H^1(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2) \cong H^1(\mathcal{L}_1) \oplus H^1(\mathcal{L}_2) = 0$$

bzw.

$$H^3(\mathcal{J}_X) \cong H^2(\mathcal{O}_X) \cong H^2(\pi_*\mathcal{O}_X) \cong H^2(\mathcal{O}_{\tilde{E}}) = 0$$

folgern. Für $i > 3$ ist $H^{i-1}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^7}(3-i)) = H^i(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^7}(3-i)) = 0$, also

$$H^i(\mathcal{J}_X(3-i)) \cong H^{i-1}(\iota_*\mathcal{O}_X(3-i)) = 0.$$

Zusammen mit $H^1(\mathcal{J}_X(d)) = 0$ für alle $d > 0$, wie bereits in *b)* gezeigt, folgern wir daraus die 3-Regularität von $\mathcal{J}_X$, d.h. $H^i(\mathcal{J}_X(3-i)) = 0 \; \forall i > 0$. Als R-Modul ist I_X dann 3-regulär ([Eisenbud] Ex.20.20) und somit gilt für die Bettizahlen β_{ij} der minimal freien Auflösung des homogenen Koordinatenrings $R_X = R/I_X$, daß $\beta_{ij} = 0$ für alle $j \geq i+3$.

Für $i = 1, 2$ ist $Sym_2 H^0(\mathcal{L}_i) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{L}_i^2)$ und $\dim H^0(\mathcal{L}_i^2) = 8$. Außerdem gilt mit dem in *a)* eingeführten zweidimensionalen Untervektorraum $V \subset H^0(\mathcal{L}_1)$, daß $V \otimes H^0(\mathcal{L}_2) \cong H^0(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2)$, also $\dim H^0(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2) = 8$ und somit $\dim \ker(H^0(\mathcal{L}_1) \otimes H^0(\mathcal{L}_2)) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{L}_1 \otimes \mathcal{L}_2)) = 8$. Daraus erhalten wir $\dim \ker(Sym_2 H^0(\mathcal{L}_1) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{L}_1^2)) = \dim \ker(Sym_2 H^0(\mathcal{L}_2) \twoheadrightarrow H^0(\mathcal{L}_2^2)) = \frac{12-8}{2} = 2$.
Wegen $H^0\mathcal{J}_X(2) \cong \ker(Sym_2 H^0(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2) \twoheadrightarrow H^0(Sym_2(\mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2))$ gibt es also eine lineare Koordinatentransformation, so daß jeweils zwei quadratische Erzeuger $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}$ (bzw. $q_1^{(2)}, q_2^{(2)}$) von I_X in den 4 Variablen des homogenen Koordinatenraumes von $L_1 \cong \mathbb{P}^3$ (bzw. $L_2 \cong \mathbb{P}^3$) gegeben sind. Diese Erzeuger bestimmen jeweils die beiden Quadriken auf L_1 (bzw. L_2), die sich in E_1 (bzw. E_2) schneiden. $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}$ (bzw. $q_1^{(2)}, q_2^{(2)}$) haben genau eine Syzygie, nämlich ihre Koszulrelation. Es bleibt noch zu zeigen, daß diese unabhängig von den linearen Relationen der 12 Erzeugenden von I_X sind: Eine lineare Koordinatentransformation liefert uns $L_1 = \{(y_0 : ... : y_7) \in \mathbb{P}^7 : y_4 = ... = y_7 = 0\}$ und $L_2 = \{(y_0 : ... : y_7) \in \mathbb{P}^7 : y_0 = ... = y_3 = 0\}$. Die 12 Erzeuger $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_1^{(2)}, q_1^{(2)}, r_1, ..., r_8 \in \Bbbk[y_0, ..., y_7]_2$ von I_X nehmen dann folgende Form an: $q_1^{(1)}, q_2^{(1)} \in \Bbbk[y_0, ..., y_3]$ und $q_1^{(2)}, q_2^{(2)} \in \Bbbk[y_4, ..., y_7]$. Sei nun $(l_1, ..., l_{12})$ eine Syzygie von $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_1^{(2)}, q_1^{(2)}, r_1, ..., r_8$ mit linearen Einträgen $l_i \in \Bbbk[y_0, ..., y_7]_1$. Wie im Beweis zu Satz 4.2. ausführlich beschrieben, zeigen wir, daß $l_1, l_2 \in \Bbbk[y_4, ..., y_7]_1$ und $l_3, l_4 \in \Bbbk[y_0, ..., y_3]_1$. Demnach kann keine der beiden Koszulrelationen von den linearen Relationen erzeugt sein.

Daraus können wir $\beta_{24} \geq 2$ schließen. Die Berechnung in einem Beispiel (siehe Anhang A.1.-.A.2 und C.2.) liefert $\beta_{24} = 2$ und damit $\beta_{24} = 2$ für allgemeines f aufgrund der Halbstetigkeit der Bettizahlen.

Die restlichen Bettizahlen $\beta_{ij} = \dim Tor_i^R(\Bbbk, R_X)_j$ können wir wie in Kapitel 3 berechnen, d.h. wir haben den Koszulkomplex der Länge 8

$$\mathcal{K} : 0 \leftarrow \Bbbk \leftarrow R \leftarrow R^8(-1) \leftarrow R^{28}(-2) \leftarrow ... \leftarrow R(-8) \leftarrow 0$$

mit R_X zu tensorieren und die Homologien des Komplexes

$$\mathcal{K} \otimes R_X : 0 \leftarrow R_X \leftarrow R_X^8(-1) \leftarrow R_X^{28}(-2) \leftarrow ... \leftarrow R_X(-8) \leftarrow 0$$

an der i-ten Stelle im Grad j zu berechnen. Zur Vereinfachung setzen wir $M^{(i)} := R_X^{\binom{8}{i}}(-i)$ für $i = 0, ..., 8$. φ_i sei die Abbildung $M^{(i)} \to M^{(i-1)}$ in $\mathcal{K} \otimes R_X$. Zerlegen wir φ_i in die Anteile vom Grad l, d.h. $\varphi_i^{(l)} : M_l^{(i)} \xrightarrow{\varphi_i} M_l^{(i-1)}$, dann können wir $\mathcal{K} \otimes R_X$ wie folgt darstellen:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \leftarrow & M^{(0)} & \xleftarrow{\varphi_1} & M^{(1)} & \xleftarrow{\varphi_2} & M^{(8)} & \leftarrow & \cdots & \xleftarrow{\varphi_8} & M^{(8)} & \leftarrow & 0 \\
 & & M_0^{(0)} & & M_1^{(1)} & & M_2^{(2)} & & \cdots & & M_8^{(8)} & & \\
 & & & \overset{\varphi_1^{(1)}}{\swarrow} & & \overset{\varphi_2^{(2)}}{\swarrow} & & \swarrow & & \overset{\varphi_8^{(8)}}{\swarrow} & & & \\
 & & M_1^{(0)} & & M_2^{(1)} & & M_3^{(2)} & & \cdots & & M_9^{(8)} & & \\
 & & & \overset{\varphi_1^{(2)}}{\swarrow} & & \overset{\varphi_2^{(3)}}{\swarrow} & & \swarrow & & \overset{\varphi_8^{(9)}}{\swarrow} & & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \cdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Mit $d_{il} := \dim\, M_l^{(i)}$ nimmt obiges Tableau mit den Einträgen d_{il} an Stelle von $M_l^{(i)}$ folgende Form an (aus Platzgründen verzichten wir sowohl auf die oberste Zeile als auch auf die Abbildungspfeile):

1	8	28	56	70	56	28	8	1
8	64	224	448	560	448	224	64	8
24	192	672	1344	1680	1344	672	192	24
48	384	1344	2688	3360	2688	1344	384	·
80	640	2240	4480	5600	4480	2240	·	·
120	960	3360	6720	8400	6720	·	·	·
168	1344	4704	9408	11760				
224	1792	6272	12544					
288	2304	8064	·					·
360	2880	·	·				·	·
440	·	·	·			·	·	·

Wir wiederholen an dieser Stelle noch einmal die uns bereits bekannten Bettizahlen: $\beta_{ij} = 0$ für alle $j \geq i+3$, $\beta_{01} = 1$, $\beta_{ii} = \beta_{0i} = 0\ \forall i > 0$, $\beta_{12} = 12$, $\beta_{13} = 0$, $\beta_{24} = 2$ und $\beta_{45} = \beta_{56} = \beta_{67} = \beta_{78} = 0$. Schließlich berechnen wir:

$$\beta_{8,10} = 440 - 2880 + 8064 - ... + 24 = 0,\ \beta_{7,9} = -(360 - 2304 + ... + 8) = 0,$$

$$\beta_{68} = 288 - 1792 + ... + 1 = 1,\ \beta_{57} = -(224 - 1344 + ... - 8) = 8,$$

$$\beta_{46} = 168 - 960 + ... + 28 = 20,\ \beta_{35} = -(120 - 640 + ... - 56) = 16,$$

$$\beta_{34} = \beta_{24} - (80 - 384 + ... + 70) = 12 \text{ und } \beta_{23} = 48 - 192 + 224 - 56 = 24.$$

Die minimal freie Auflösung $\mathbf{F}_{R_X}$ von R_X ist also wie behauptet:

$$\mathbf{F}_{R_X}: \qquad 0 \leftarrow R_X \overset{\vartheta_0}{\leftarrow} R \overset{\vartheta_1}{\leftarrow} R^{12}(-2) \overset{\vartheta_2}{\leftarrow} R^{24}(-3) \oplus R^2(-4) \overset{\vartheta_3}{\leftarrow}$$

$$\overset{\vartheta_3}{\leftarrow} R^{12}(-4) \oplus R^{16}(-5) \overset{\vartheta_4}{\leftarrow} R^{20}(-6) \overset{\vartheta_5}{\leftarrow} R^8(-7) \overset{\vartheta_6}{\leftarrow} R(-8) \leftarrow 0$$

□

4.2.1 Satz. *Sei $\tilde{\vartheta}_3 : R^{16}(-5) \to R^2(-4)$ die Beschränkung der in $\mathbf{F}_{R_X}$ auftretenden Abbildung $\vartheta_3 : R^{12}(-4) \oplus R^{16}(-5) \to R^{24}(-3) \oplus R^2(-4)$ und $\tilde{M}$, M die durch $\tilde{\vartheta}_3$ bzw. ϑ_3 gegebenen Matrizen. Sind $L_1, L_2 \cong \mathbb{P}^3$ die linearen Unterräume des $\mathbb{P}^7$ wie in 4.0, dann gilt:*

$$V(\text{ann coker } \tilde{M}) = L_1 \cup L_2$$

Beweis. Eine lineare Koordinatentransformation liefert uns $L_1 = \{(y_0 : ... : y_7) \in \mathbb{P}^7 : y_4 = ... = y_7 = 0\}$ und $L_2 = \{(y_0 : ... : y_7) \in \mathbb{P}^7 : y_0 = ... = y_3 = 0\}$. Nach den Ausführungen in 4.1.c) nehmen die 12 Erzeuger $q_1^{(1)}, q_2^{(1)}, q_1^{(2)}, q_1^{(2)}, r_1, ..., r_8 \in \Bbbk[y_0, ..., y_7]_2$ von I_X dann folgende Form an: $q_1^{(1)}, q_2^{(1)} \in \Bbbk[y_0, ..., y_3]$ und $q_1^{(2)}, q_2^{(2)} \in \Bbbk[y_4, ..., y_7]$. Diese bestimmen jeweils die elliptischen Kurven E_1 bzw. E_2 auf L_1 bzw. L_2. Angenommen, $r \in \{r_1, ..., r_8\}$ hätte einen Term, in dem nur die Variablen $y_0, ..., y_3$ vorkommen. Wir setzen dann $y_4 = ... = y_7 = 0$ und erhalten eine quadratische Form $\tilde{r} \in \Bbbk[y_0, ..., y_3]_2$. Diese hat wegen $X \cap L_1 = E_1$ die Punkte Ω_1 auf E_1 als Nullstellen, woraus wir $\tilde{r} \in (q_1^{(1)}, q_2^{(1)})$ schließen. Wir können also r durch $r - \tilde{r}$ ersetzen. Analog dazu kann auch auf die Terme in r, in denen nur die Variablen $y_4, ..., y_7$ vorkommen, verzichtet werden. Wir dürfen also annehmen, daß r_i für alle i nur gemischte Terme hat, d.h. alle Terme von r_i enthalten eine Variable aus $y_0, ..., y_3$ und eine aus $y_4, ..., y_7$.

Sei E, N die durch die Abbildung ϑ_1 bzw. ϑ_2 in $\mathbf{F}_{R_X}$ gegebenen Matrizen. Nach den Ausführungen in 4.1 lassen sich dann E, N wie folgt schreiben:

$$E = \begin{pmatrix} q_1^{(1)} & q_2^{(1)} & q_1^{(2)} & q_2^{(2)} & r_1 & \cdot & \cdot & \cdot & r_8 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} -q_2^{(1)} & 0 & \\ q_1^{(1)} & 0 & N^{(1)} \\ 0 & -q_2^{(2)} & \\ 0 & q_1^{(2)} & N^{(2)} \\ 0 & 0 & \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$$

$N^{(1)}$ ist eine 2×24 Matrix mit Einträgen in $\Bbbk[y_4, ..., y_7]_1$ und $N^{(2)}$ eine 2×24 Matrix mit Einträgen in $\Bbbk[y_0, ..., y_3]_1$. Wegen $N \cdot M = 0$ können wir Aussagen über die Gestalt von M treffen:

$$0 = \begin{pmatrix} -q_2^{(1)} & 0 & \multirow{2}{*}{$N^{(1)}$} \\ q_1^{(1)} & 0 & \\ 0 & -q_2^{(2)} & \multirow{2}{*}{$N^{(2)}$} \\ 0 & q_1^{(2)} & \\ 0 & 0 & \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \\ 0 & 0 & \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} w_1 & \cdot & \cdot & \cdot & w_{16} & \\ z_1 & \cdot & \cdot & \cdot & z_{16} & * \\ & & * & & & * \end{pmatrix}}_{M}$$

$\tilde{M}$ ist dann die Matrix $\begin{pmatrix} w_1 & \cdot & \cdot & \cdot & w_{16} \\ z_1 & \cdot & \cdot & \cdot & z_{16} \end{pmatrix}$ mit linearen Einträgen $w_1, ..., w_{16}, z_1, ..., z_{16} \in \Bbbk[y_0, ..., y_7]$. Da $N^{(1)}$ nur Einträge in $\Bbbk[y_4, ..., y_7]_1$ besitzt, kann w_i für alle $i = 1, ..., 16$ keine der Variablen $y_0, ..., y_3$ enthalten. Analog dazu gilt für alle z_i, daß $z_i \in \Bbbk[y_0, ..., y_3]_1$. Die erste Zeile von $\tilde{M}$ hängt also nur von den Variablen $y_4, ..., y_7$ ab, wohingegen die zweite Zeile nur von $y_0, ..., y_3$ abhängt. Folglich ist $L_1 \cup L_2 \subset V(\text{ann coker } \tilde{M})$. Rechnung in einem Beispiel für f zeigt Gleichheit, woraus wir die Richtigkeit der Behauptung im allgemeinen Fall schließen (siehe Anhang A.1.-A.2. und C.2.).$\square$

4.2.2. Mit Hilfe von Satz 4.2.1 können wir nun für gegebenes f wie in 4.0 die Verschwindungsideale $I_{\Gamma_1}, I_{\Gamma_2}$ der beiden Punktmengen $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{P}^3$ bestimmen. Sei $(\text{ann coker } \tilde{M}) = I_{L_1} \cdot I_{L_2}$ die Zerlegung von $(\text{ann coker } \tilde{M})$ in die Verschwindungsideale I_{L_1}, I_{L_2} von L_1 bzw. L_2. L_1 ist durch Angabe von 4 Punkten in allgemeiner Lage auf L_1 eindeutig bestimmt. Sei W_1 die $8 \times 4-$Matrix der Koeffizienten dieser 4 Punkte.
Betrachten wir noch einmal die Einschränkung $\phi_3' : T^8(-5) \to T^{18}(-4)$ der in der freien Auflösung von A^F

$$\mathbf{L}: \; 0 \leftarrow A^F \overset{\phi_0}{\leftarrow} T \overset{\phi_1}{\leftarrow} T^2(-2) \oplus T^8(-3) \overset{\phi_2}{\leftarrow} T^{18}(-4) \overset{\phi_3}{\leftarrow}$$

$$\overset{\phi_3}{\leftarrow} T^8(-5) \oplus T^2(-6) \overset{\phi_4}{\leftarrow} T(-7) \leftarrow 0$$

vorkommenden Abbildung ϕ_3 (siehe 3.2 und 3.3): ϕ_3' kann durch eine 18×8 Matrix $B_{(\partial_0,...,\partial_3)}$ mit linearen Einträgen in $\Bbbk[\partial_0, ..., \partial_3]$ dargestellt werden. Nach 3.4 besitzt die Abbildung $B_{(\xi_0,...,\xi_3)} : \Bbbk^8 \to \Bbbk^{18}$ für feste Werte $\xi_0, ..., \xi_3 \in \Bbbk$ genau dann eine Nullstelle $(\eta_0, ..., \eta_8)^t \in \Bbbk^8$, wenn $\xi = (\xi_0 : ... : \xi_3) \in E$. In diesem Fall ist $\eta := (\eta_0 : ... : \eta_8) = \delta((\xi_0 : ... : \xi_3)) \in \tilde{E}$. L_1 hat mit $\tilde{E}$ genau die 8 Punkte $\delta(\Gamma_1) = \delta(\{p_1, ..., p_8\}) = \{\delta(p_i) = (\eta_0^{(i)} : ... : \eta_8^{(i)})\}_{i=1,...,8}$ gemeinsam (zur Definition von δ siehe 4.0), also hat $B_{(\xi_0,...,\xi_3)} \cdot W_1$ genau im Fall $\xi \in \Gamma_1$, d.h. $\xi = p_{i_0}$ mit $i_0 \in \{1, ..., 8\}$, eine Nullstelle, nämlich $(\eta_0^{(i_0)}, ..., \eta_8^{(i_0)})$, d.h. (ann coker $B_{(\partial_0,...,\partial_3)} \cdot W_1) = I_{\Gamma_1}$. Der Fall Γ_2 ist analog zu behandeln.□□

Anhang

Die folgenden Lemmata stellen ein wichtiges Mittel dar, Ergebnisse, die durch Berechnung in einem Beispiel für f erzielt wurden, auf den allgemeinen Fall zu übertragen. Mit Hilfe von Lemma A.1. können wir durch die Berechnung über einem Körper endlicher Chrakteristik, in unserem Fall $\mathbb{Z}/101$, Halbstetigkeitsaussagen über beliebige Körper $\Bbbk$ mit *char* $\Bbbk = 0$ treffen. So ist in allen Beispielrechnungen ein $f \in \mathbb{Z}/101[x_0, ..., x_3]_4$ bzw. Linerformen $l_i \in \mathbb{Z}/101[x_0, ..., x_3]_1$ willkürlich vorgegeben. Anhand der Lemmata A.2 und A.3 lassen sich dann Halbstetigkeitsaussagen über die Dimension bzw. den Grad einer Varietät, die Bettizahlen einer minimal freien Auflösung des zugehörigen Koordinatenrings oder die Vielfachheit eines Punktes treffen.

A.1. Halbstetigkeitslemma[1]. *Seien* $f_1, ..., f_k \in \mathbb{Z}[x_0, ..., x_n]$, $k, n \in \mathbb{N}$, *homogene Polynome in n+1 Variablen, die das Ideal* $I \subset \mathbb{Q}[x_0, ..., x_n]$ *erzeugen. Die natürliche Abbildung* $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$, *p prim, induziert* $\mathbb{Z}[x_0, ..., x_n] \to \mathbb{F}_p[x_0, ..., x_n]$, $f \to f^{(p)}$. *Für das durch* $f_1^{(p)}, ..., f_k^{(p)} \in \mathbb{F}_p[x_0, ..., x_n]$ *gegebene Ideal* $I^{(p)} \subset \mathbb{F}_p[x_0, ..., x_n]$ *gilt dann:*

a) $\dim \mathbb{F}_p[x_0, ..., x_n]/I^{(p)} \geq \dim \mathbb{Q}[x_0, ..., x_n]/I$

b) *Ist* $\dim \mathbb{F}_p[x_0, ..., x_n]/I^{(p)} = \dim \mathbb{Q}[x_0, ..., x_n]/I$, *so gilt:*

$$\deg \mathbb{F}_p[x_0, ..., x_n]/I^{(p)} \geq \deg \mathbb{Q}[x_0, ..., x_n]/I$$

c) *Haben die Hilbertfunktionen* $h^{(p)}$, h *von* $R_I^{(p)} := \mathbb{F}_p[x_0, ..., x_n]/I^{(p)}$ *bzw.* $R_I := \mathbb{Q}[x_0, ..., x_n]/I$ *die gleichen Werte, so gilt für die Bettizahlen* $\beta_{ij}^{(p)}, \beta_{ij}$ *der minimal freien Auflösung von* $R_I^{(p)}$ *bzw.* R_I, *daß* $\beta_{ij}^{(p)} \geq \beta_{ij}$ *für alle* i, j.

Beweis. Sei $R = \mathbb{Q}[x_0, ..., x_n]$, $R^{(p)} = \mathbb{F}_p[x_0, ..., x_n]$ und h, $h^{(p)}$ die Hilbertfunktion von R/I bzw. $R^{(p)}/I^{(p)}$. Sind $s_1, ..., s_m \in \mathbb{Q}[x_0, ..., x_n]_d$, $d, m \in \mathbb{N}$, linear abhängige Polynome vom Grad d (o.E. können wir $s_1, ..., s_m \in \mathbb{Z}[x_0, ..., x_n]_d$ annehmen), so gilt dies auch für $s_1^{(p)}, ..., s_m^{(p)}$ und damit ist $\dim(R/I)_d \leq \dim(R^{(p)}/I^{(p)})_d \Rightarrow h(d) \leq h^{(p)}(d)$ für alle d. Der Grad des zu R/I gehörigen Hilbertpolynoms H muß also kleiner oder gleich dem von $H^{(p)}$, das Hilbertpolynom von $R^{(p)}/I^{(p)}$, sein, woraus a) folgt. Haben h und

$h^{(p)}$ gleichen Grad, dann muß der Leitkoeffizient von H kleiner oder gleich dem von $H^{(p)}$. Daraus ergibt sich die Richtigkeit von b).

c) Die Bettizahlen $\beta_{ij} = \dim Tor_i^R(\Bbbk, R_I)_j$ der minimal freien Auflösung von R_I berechnen sich wie in in Kapitel 3 ausgeführt als Homologien des Komplexes, den wir durch Tensorierung der minimal freie Auflösung von $\Bbbk$ als R-Modul, den Koszulkomplex der Länge $n+1$, mit R_I erhalten, d.h. $\beta_{ij} = \dim(h^i\mathcal{K})_j$ mit folgendem Komplex $\mathcal{K}$:

$$0 \leftarrow (R_I)^{\binom{n+1}{0}}(-0) \overset{\varphi_1}{\leftarrow} (R_I)^{\binom{n+1}{1}}(-1) \overset{\varphi_2}{\leftarrow} \ldots \overset{\varphi_{n+1}}{\leftarrow} (R_I)^{\binom{n+1}{n+1}}(-n-1) \leftarrow 0$$

Seien mit $\varphi_l^{(k)} : (R_I^{(k)})_l \overset{\varphi_k}{\to} (R_I^{(k-1)})_l$, $R_I^{(k)} := (R_I)^{\binom{n+1}{k}}(-k)$, die Zerlegung der Abbildung φ_k in die Anteile vom Grad l und mit $c_{kl} = \dim\ (R_I^{(k)})_l$ bezeichnet. Analog dazu seien $\varphi_l^{(p,k)} = \varphi_l^{(k)} \bmod p$ und $c_{kl}^{(p)}$, $R_I^{(p,k)}$ definiert, wenn wir in den obigen Ausführungen $R_I^{(p)}$ an Stelle von R_I schreiben. Da die Hilbertfunktionen von R_I und $R_I^{(p)}$ übereinstimmende Werte besitzen, sind auch die Werte c_{kl} und $c_{kl}^{(p)}$ gleich. Mit diesen Bezeichnungen haben wir $\beta_{ij} = \dim(\ker\varphi_l^{(k)}/\mathrm{im}\varphi_l^{(k+1)})$. Die Matrizen A_{kl}, $A_{kl}^{(p)}$, welche durch die Abbildungen $\varphi_l^{(k)}$ bzw. $\varphi_l^{(p,k)}$ bestimmt sind, haben o.E. Einträge in $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{F}_p$. Wegen rank $A_{kl} \geq$ rank $A_{kl}^{(p)} \Rightarrow$ rank $\varphi_l^{(k)} \geq$ rank $\varphi_l^{(p,k)}$ und rank $\varphi_l^{(k)} + \dim\ker\varphi_l^{(k)} = c_{kl} = c_{kl}^{(p)}$ =rank $\varphi_l^{(p,k)} + \dim\ker\varphi_l^{(p,k)}$ folgern wir, daß $\dim\ker\ \varphi_l^{(k)} \leq \dim\ker\ \varphi_l^{(p,k)}$. Damit ergibt sich die Behauptung.$\square$

Faßt man $f_1, ..., f_k$ als Polynome über einem beliebigen Körper $\Bbbk$ mit *char* $\Bbbk = 0$ auf, dann gelten die entsprechenden Aussagen aus A.1. auch für $\Bbbk$ an Stelle von $\mathbb{Q}$.

A.2. Halbstetigkeitslemma[2]**.** *Seien* $f_1, ..., f_k \in \Bbbk(a_0, ..., a_m)[x_0, ..., x_n]$, $k, m, n \in \mathbb{N}$, *homogene Polynome in n+1 Variablen, deren Koeffizienten durch homogene Polynome gleichen Grades in* $a_0, ..., a_m \in \Bbbk$ *gegeben sind. Für festes* $a = (a_0 : ... : a_m) \in \mathbb{P}^m$ *erhalten wir dann Polynome* $f_1^{(a)}, ..., f_k^{(a)}$ *über* $\Bbbk$, *die das Ideal* I_a *erzeugen. Es gibt dann zu jedem Punkt* $a = (a_0, ..., a_m) \in \Bbbk^{m+1}$ *eine Zariski-offene Umgebung* $U_a \subset \mathbb{P}^m$, *so daß für alle* $b = (b_0 : ... : b_m) \in U_a$ *gilt:*

a) $\dim \Bbbk[x_0, ..., x_n]/I_a \geq \dim \Bbbk[x_0, ..., x_n]/I_b$

b) *Ist* $\dim \Bbbk[x_0, ..., x_n]/I_a = \dim \Bbbk[x_0, ..., x_n]/I_b$, *so gilt:*

$$\deg \Bbbk[x_0, ..., x_n]/I_a \geq \deg \Bbbk[x_0, ..., x_n]/I_b$$

c) *Hat* $R^{(b)} := \Bbbk[x_0, ..., x_n]/I_b$ *für* $b \in U_a$ *konstante Hilbertfunktion, dann gibt es eine Zariski-offene Menge* $\tilde{U}_a \subset U_a$, so daß *für die Bettizahlen* $\beta_{ij}^{(a)}, \beta_{ij}^{(b)}$ *der minimal freien Auflösung von* $R^{(a)}$ *bzw.* $R^{(b)} := \Bbbk[x_0, ..., x_n]/I_b$ *gilt:* $\beta_{ij}^{(a)} \geq \beta_{ij}^{(b)}$ *für alle* $b \in \tilde{U}_a$

Beweis. $R = \Bbbk[x_0, ..., x_n]$ bezeichne den homogenen Koordinatenring von $\mathbb{P}^n$, H_a die Hilbertfunktion von R/I_a und h_a das zugehörige Hilbertpolynom. Seien nun für $d \in \mathbb{N}$, $i = 1, ..., r \leq \binom{n+d}{d} =: n_d$, $r \in \mathbb{N}$, homogene Polynome $s_i^{(a)} = \sum_{j=1}^{k} t_{ij} f_j^{(a)} \in (I_a)_d$ mit $t_{ij} \in R_{d-d_j}$, $d_j = \deg f_j^a$, gegeben. Die $r \times r$ Minoren der Koeffizientenmatrix von $s_1^{(a)}, ..., s_r^{(a)}$ sind dann homogene Polynome $m_l \in \Bbbk[a_0, ..., a_m]$, $l = 1, ..., \binom{n_d}{r}$ in den Variablen $a_0, ..., a_m$. Sei J das von den m_l erzeugte Ideal, dann sind $s_1^{(a)}, ..., s_r^{(a)}$, für festes a, genau dann linear unabhängig in $(I_a)_d$, wenn a kein Punkt der Verschwindungsmenge $V(J)$ ist. Es gibt also eine Zariski-offene Umgebung $U_a \subset \mathbb{P}^m$ von a, so daß auch $\tilde{s}_i^{(b)} = \sum_{j=1}^{k} t_{ij} f_j^{(b)} \in (I_b)_d$ linear unabhängig sind. Für alle $b \in U_a$ und alle $d \in \mathbb{N}$ ist dann $H_a(d) \geq H_b(d)$ und folglich deg $h_a \geq$ deg h_b. Haben h_a und h_b gleichen Grad, so muß der Leitkoeffizient von h_b kleiner oder gleich dem von h_a sein, also $\deg R/I_a \geq \deg R/I_b$. Es folgt a) und b).

c) Die Bettizahlen $\beta_{ij}^{(b)} = \dim Tor_i^R(\Bbbk, R^{(b)})_j$ der minimal freien Auflösung von $R^{(b)}$ berechnen sich wie in in Kapitel 3 ausgeführt als Homologien des Komplexes, den wir durch Tensorierung der minimal freie Auflösung von $\Bbbk$ als R-Modul, den Koszulkomplex der Länge $n+1$, mit $R^{(b)}$ erhalten, d.h. $\beta_{ij}^{(b)} = \dim(h^i \mathcal{K})_j$ mit folgendem Komplex $\mathcal{K}$:

$$0 \leftarrow (R^{(b)})^{\binom{n+1}{0}}(-0) \overset{\varphi_1}{\leftarrow} (R^{(b)})^{\binom{n+1}{1}}(-1) \overset{\varphi_2}{\leftarrow} \dots \overset{\varphi_{n+1}}{\leftarrow} (R^{(b)})^{\binom{n+1}{n+1}}(-n-1) \leftarrow 0$$

Seien mit $\varphi_l^{(b,k)} : (R^{(b,k)})_l \overset{\varphi_k}{\to} (R^{(b,k-1)})_l$, $R^{(b,k)} := (R^{(b)})^{\binom{n+1}{k}}(-k)$, die Zerlegung der Abbildung φ_k in die Anteile vom Grad l und mit $c_{kl}^{(b)} = \dim \left(R^{(b,k)}\right)_l$ bezeichnet. Da $R^{(b)}$ für alle $b \in U_a$ konstante Hilbertfunktion besitzt, sind auch die Werte $c_{kl}^{(b)}$ für alle $b \in U_a$ konstant. Mit diesen Bezeichnungen haben wir $\beta_{ij}^{(b)} = \dim(\ker \varphi_l^{(b,k)} / \mathrm{im} \varphi_l^{(b,k+1)})$. Die Matrizen $A_{kl}^{(b)}$, welche die Abbildungen $\varphi_l^{(b,k)}$ bestimmen, haben Einträge in $\Bbbk(a_0, ..., a_m)$. Wir können daher eine Zariski-offene Menge $\tilde{U}_a \subset U_a$ angeben, so daß rank $A_{kl}^{(b)} \geq$rank $A_{kl}^{(a)} \Rightarrow$ rank $\varphi_l^{(b,k)} \geq$ rank $\varphi_l^{(a,k)}$ für alle $b \in \tilde{U}_a$. Wegen rank $\varphi_l^{(b,k)} + \dim \ker \varphi_l^{(b,k)} = c_{kl}^{(b)} = c_{kl}^{(a)}$ =rank $\varphi_l^{(a,k)} + \dim \ker \varphi_l^{(a,k)}$ folgern wir hieraus $\dim \ker \varphi_l^{(b,k)} \leq \dim \ker \varphi_l^{(a,k)}$ für alle $b \in \tilde{U}_a$. Damit ergibt sich die Behauptung.$\Box$

B. Lemma. *Sei* $I \subset R = \Bbbk[x_1, ..., x_n]$, $\dim R/I = 0$, *d.h. das durch* I *bestimmte affine Schema* $V(I)$ *ist eine Punktemenge* $\Gamma = \{p_1, ..., p_m\}$, $m \in \mathbb{N}$, *und* $\wp$ *das verschwindungsideal in einem der Punkte* p_{i_0}, $i_0 = 1, ..., m$. *Ist* $\deg R/(I + \wp^2) = \deg R/(I + \wp) = 1$, *dann gilt für die Vielfachheit des Punktes* p_{i_0}, *daß* $\mu_\wp(R/I) = 1$.

Beweis. Wir betrachten zunächst die Primärzerlegung von I

$$I = \bigcap_{j=1,...,m} q_j \text{ mit } \wp_j\text{−primären Idealen } q_j,$$

wobei $\wp_j$ das Verschwindungsideal des Punkte p_j ist, also insbesondere ist $q := q_{i_0}$ $\wp$-primär. Wegen $R/I = \bigoplus_j (\mathcal{O}_{\Bbbk^n, \wp_j} / q_j \mathcal{O}_{\Bbbk^n, \wp_j})$ haben wir $\mu_\wp(R/I) = \dim(\mathcal{O}_{\Bbbk^n, \wp} / q \mathcal{O}_{\Bbbk^n, \wp})$. Dieser Ausdruck wird genau dann gleich 1, wenn $q = \wp$. Wir zeigen nun, daß $\wp_\wp = (\wp^2 + I)_\wp$, d.h die Gleichheit von $\wp$ und $\wp^2 + I$ im lokalen Ring $\mathcal{O}_{\Bbbk^n, \wp}$. Da $I_\wp \subset \wp_\wp$ folgt daraus unter Verwendung des Lemmas von Nakayama die Gleichheit von $\wp_\wp$ und $I_\wp$ und somit $\mathcal{O}_{\Bbbk^n, \wp} / q \mathcal{O}_{\Bbbk^n, \wp} = \Bbbk$, also $q = \wp$. Angenommen es sei $\wp_\wp \neq (\wp^2 + I)_\wp$, dann gäbe es ein $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \in \wp_\wp$ mit $\varepsilon \notin (\wp^2 + I)_\wp$ wegen $\wp^2 + I \subset \wp \Rightarrow \varepsilon_1 \in \wp \backslash (\wp^2 + I)$ und $\varepsilon_2 \notin \wp$. Wegen $\wp \neq (x_1, ..., x_n)$ gibt es ein x_i, $i \in \{1, ..., n\}$, mit $x_i \notin \wp$ und somit ist auch $x_i^n \notin \wp$ für alle $n \in \mathbb{N}$, da $\wp$ prim ist. Folglich ist $x_i^n \varepsilon_1 \notin \wp^2 + I$, da sonst $(x_i^n \varepsilon_1)_\wp \in (\wp^2 + I)_\wp$ und somit $\varepsilon_1 \in \wp^2 + I$ im Widerspruch zu $\varepsilon_1 \in \wp \backslash (\wp^2 + I)$. Für alle $n > \deg \varepsilon_1$ gilt also $\dim_{\Bbbk}(R/(\wp^2 + I))_n \geq 2 \Rightarrow \deg(R/(\wp^2 + I)) \geq 2$, da $(R/(\wp^2 + I))_n$ wenigstens die beiden unabhängigen Erzeuger x_i^n und $x_i^{n - \deg \varepsilon_1} \varepsilon_1$ besitzt, und damit ein Widerspruch zur Voraussetzung $\deg R/(I + \wp^2) = \deg R/(I + \wp) = 1$.$\Box$

C.1. Rechnung (Macaulayscript)

```
restart
kk=ZZ/101
Raffin=kk[x,y,z]
R=kk[w,x,y,z]
```

– Wahl von zehn beliebigen Punkten:

```
Pkte=apply(10,i->random(1,R))
f=sum(10,i->(Pkte_i)^4)
S=kk[w,x,y,z,k,a0,a1,a2,a3,a4,a5,a6,a7,a8,a9,b0,b1,b2,b3]
f2=substitute(f,S)
```

– 2-Form D, die D(f)=k*l^2 erfüllt:

```
D=a0*w^2+a1*w*x+a2*w*y+a3*w*z+a4*x^2+a5*x*y+
a6*x*z+a7*y^2+a8*y*z+a9*z^2
DF=sum(10,i->(vars S)_(i+5)_0*diff(diff((vars S)_(i+5)_0,D),f2))
l=b0*w+b1*x+b2*y+b3*z
```

– Aufstellen des linearen GLS:

```
G=DF-k*l^2
GL=apply(10,i->diff(diff((vars S)_(i+5)_0,D),G))
```

– k kann 1 gesetzt werden, da D'=(1/k)*D auch Lösung des Problems mit D'(f)=l^2 :

```
GL2=apply(10,i->apply(11,j->diff((vars S)_(j+4)_0,GL_i)))
M=matrix{{0,w^2,w*x,w*y,w*z,x^2,x*y,x*z,y^2,y*z,z^2},GL2_0,GL2_1,
GL2_2,GL2_3,GL2_4,GL2_5,GL2_6,GL2_7,GL2_8,GL2_9}
Taffin=kk[x,y,z,b1,b2,b3,c1,c2,c3]
T=kk[w,x,y,z,b0,b1,b2,b3,c0,c1,c2,c3]
```

– die apolare Quadrik zu einem Punkt (b0,b1,b2,b3):

```
Q=substitute(det M,T)
PkteT=apply(10,i->substitute(Pkte_i,T))
```

– die Quartik der selbstapolaren Punkte:

```
Q4=substitute(Q,{b0=>w,b1=>x,b2=>y,b3=>z})
```

– apolare Quadrik zu den Punkten Pkte_n:

```
Quadrik=(n)->(substitute(Q,{b0=>diff(w,PkteT_n),b1=>diff(x,PkteT_n),
b2=>diff(y,PkteT_n),b3=>diff(z,PkteT_n)}))
tau=matrix{{b0,b1,b2,b3,c0,c1,c2,c3,w,x,y,z}}
E0=Quadrik(0)
E1=Quadrik(1)
E2=substitute(E0,tau)
E3=substitute(E1,tau)
E4=substitute(E2,tau)
E5=substitute(E3,tau)
Q2=substitute(Q,{w=>c0,x=>c1,y=>c2,z=>c3})
Q3=substitute(Q,{b0=>c0,b1=>c1,b2=>c2,b3=>c3})
```

– Die Varietät der 16 Schnittpunkte des Schnitts der 9 Hyperflächen:

```
V=ideal(E0,E1,E2,E3,E4,E5,Q,Q2,Q3)
GV=mingens V
```

– Rechnung auf affiner Karte (w=b0=c0=1):

```
Vaffin=ideal substitute(substitute(GV,{w=>1,b0=>1,c0=>1}),Taffin)
```

– maximales Ideal im Punkt (Pkte_i , Pkte_j , Pkte_k), i<j<k, auf affiner Karte:

```
l=(i)->((diff(w,PkteT_i))^99) – Berechnung des Inversen bzgl. ZZ/101
Sq'=(2,2,2)..(9,9,9)
Sq=delete((0,0,0),apply(#Sq',i->if Sq'_i_0<Sq'_i_1 and Sq'_i_1<Sq'_i_2 then
Sq'_i else (0,0,0)))
MI=(v)->(ideal substitute (gens ideal(x-diff(x,PkteT_(Sq_v_0))*l(Sq_v_0),
y-diff(y,PkteT_(Sq_v_0))*l(Sq_v_0),z-diff(z,PkteT_(Sq_v_0))*l(Sq_v_0),
b1-diff(x,PkteT_(Sq_v_1))*l(Sq_v_1),b2-diff(y,PkteT_(Sq_v_1))*l(Sq_v_1),
b3-diff(z,PkteT_(Sq_v_1))*l(Sq_v_1),c1-diff(x,PkteT_(Sq_v_2))*l(Sq_v_2),
c2-diff(y,PkteT_(Sq_v_2))*l(Sq_v_2),
c3-diff(z,PkteT_(Sq_v_2))*l(Sq_v_2)),Taffin))
MI2=(v)->((MI(v))^2)
```

– Schnittmultiplizität in (Pkte_i , Pkte_j , Pkte_k), i<j<k:

```
apply(56,v->dim(MI(v)+Vaffin))
apply(56,v->degree(MI(v)+Vaffin))
apply(56,v->degree(MI2(v)+Vaffin))
```

– Ergebnis ist 1, d.h. die Schnittmultiplizität ist gleich 1

– die elliptische Kurve E und die Quartik Q4 der selbstapolaren Punkte:

```
EVarR=ideal(substitute(E0,R),substitute(E1,R))
Q4VarR=ideal(substitute(Q4,R))
GammaR=Q4VarR+EVarR
dim GammaR
degree GammaR
dim (GammaR+ideal(substitute(w,R))+ideal(substitute(x,R)-1)*
ideal(substitute(y,R)-1)*ideal(substitute(z,R)-1))
```

– Ergebnis -1, also liegen alle 16 selbstapolaren Punkte p auf der affinen Karte w=1

– Schnittmultiplizität der Quartik der selbstapolaren Punkte mit der elliptischen Kurve E:

```
GammaRaffin=ideal substitute(substitute(gens GammaR,
{substitute(w,R)=>1}),Raffin)
dim (minors(3,diff(vars Raffin,transpose mingens GammaRaffin))+
GammaRaffin)
```

– Ergebnis -1, d.h der Schnitt von E mit Q4 ist nicht singulär, es gibt demnach genau 16 einfache Schnittpunkte

```
R12affin=kk[x,y,z,b1,b2,b3]
R12=kk[w,x,y,z,b0,b1,b2,b3]
EVarR12=ideal(substitute(E0,R12),substitute(E1,R12),
substitute(E2,R12),substitute(E3,R12))
Q4VarR12=ideal(substitute(Q4,R12))
GammaR12=EVarR12+Q4VarR12
D12=substitute(Q,R12)
Schnitt=GammaR12+ideal(D12)
dim (Schnitt+ideal(w-1)+ideal(b0)+ideal(b1-1)*ideal(b2-1)*ideal(b3-1))
```

– Ergebnis -1, also liegen für alle selbstapolaren p auf E auch die Schnittpunkte der bezgl. p apolaren Quadrik mit E auf der gleichen affinen Karte w=1. wir können uns demnach auf die Berechnung auf dieser Karte beschränken!

–Schnittmultiplizität in den Punkten (p,q,p),(p,p,q),(q,p,p), p selbstapolar:

```
AffineSchnitt=ideal substitute(substitute(mingens Schnitt,{w=>1,b0=>1}),
R12affin)
dim AffineSchnitt
degree AffineSchnitt
```

– Ergebnis 128

```
Jacobi=diff(vars R12affin,transpose gens AffineSchnitt)
Singular=minors(6,Jacobi)
dim(Singular+AffineSchnitt)
```

– Ergebnis -1: Folglich sind die Schnitte (p,q) einfach, also gibt es wirklich 128 verschiedene solche Paare, bzw. genau 128 verschiedene Tupel (p,q,p)

```
SchnittGesT=ideal(substitute(gens Schnitt,T))+
ideal(substitute(w,T)-substitute(c0,T),
substitute(x,T)-substitute(c1,T),substitute(y,T)-substitute(c2,T),
substitute(z,T)-substitute(c3,T))
SchnittGesTaffin=ideal substitute(substitute(gens SchnittGesT,
{substitute(w,T)=>1,substitute(b0,T)=>1,substitute(c0,T)=>1}),Taffin)
dim SchnittGesTaffin
degree SchnittGesTaffin
```

– Ergebnis 128

```
SchnittGesTaffin2=SchnittGesTaffin^2
Mult1=SchnittGesTaffin+Vaffin
degree Mult1 – Ergebnis 128
Mult2=SchnittGesTaffin2+Vaffin
degree Mult2
```

– Ergebnis 128, also ist Schnittmultiplizität in den Punkten (p,q,p) gleich 1. Aus Symmetriegründen ist dann auch die Schnittmultiplizität in (p,p,q) und (q,p,p) gleich 1, d.h. alle auftretenden Schnitte sind einfach!

C.2. Rechnung (Macaulayscript)

```
restart
kk=ZZ/101
R=kk[a..d]
```

– Wahl von 8 allgemeinen Linearformen l_i bzw. Punkten p_i=V(l_i)

```
Liste=apply(8,i->(random(1,R)))
f=sum(Liste,l->l^4)
```

–Verschwindungsideal der Punkte p_i

```
gamma=intersect apply(Liste,l->ideal(vars(R)*(syz(diff(l,vars(R))))))
```

– Die minimal freie Auflösung von gamma

```
Fgamma=res gamma
betti Fgamma
M=transpose Fgamma.dd_3
degree coker M
dim coker M
```

```
macaulayDual=(f)->(
r3:=symmetricPower(3,vars R);
r2:=symmetricPower(2,vars R);
i2:=r2*(syz( diff(r2,f),DegreeLimit=>2));
i3:=r3*(syz( diff(r3,f),DegreeLimit=>3));
ideal mingens(ideal i2 + ideal i3))
```

–Das Ideal i, der zu f apolaren Formen

```
i=macaulayDual(f)
```

–Die minimal freie Auflösung von i

```
L=res i
betti L
betti(m=transpose (L.dd_3)_{0..7})
S=kk[t_0..t_7]
RS=R**S
```

–Flip der Matrix m

flipm=substitute(diff(transpose substitute(vars(R),RS),
substitute(vars(S),RS)*substitute(m,RS)),S)

–Das Verschwindungsideal J der elliptischen Kurve Eˆ˜in PPˆ7 (=ann coker flipm)

J=annihilator coker flipm;

–Grad von E˜

degree J
time betti res J
genus(S/J)

–Das Ideal, daß durch die quadratischen Formen in J erzeugt wird (=Verschwindungsideal der Regelfläche X) und dessen minimal freie Auflösung

ResX=res(X=ideal (mingens J)_{0..11})
betti ResX
hilbertPolynomial(S/X)
D=(ResX.dd_3)ˆ{24,25}_{12..27}

–Das Verschwindungsideal der Vereinigung der beiden linearen Unterräume L_1 und L_2

L1L2=annihilator coker D
degree L1L2
dim L1L2

–Zerlegung in die jeweiligen Verschwindungsideale von L_1 bzw. L_2

time Zerlegung=decompose L1L2

–Angabe von jeweils 4 Punkten auf L_1 bzw. L_2 in allgemeiner Lage

Pkt0=substitute(lift(syz transpose diff(transpose vars S,gens Zerlegung_0),kk),R)
Pkt1=substitute(lift(syz transpose diff(transpose vars S,gens Zerlegung_1),kk),R)

–Die Verschwindungsideale von gamma1 und gamma2

```
I0=annihilator coker transpose map(R^18,R^{4:-1},(L.dd_3_{0..7}*Pkt0))
I1=annihilator coker transpose map(R^18,R^{4:-1},(L.dd_3_{0..7}*Pkt1))
```

–Probe:

```
betti res I0
betti res(gamma+I0)
betti res I1
betti res(gamma+I1)
betti res(i+I0)
betti res(i+I1)
```

C.3. Rechnung (Macaulayscrip)

```
restart
kk=QQ
```

–w_0,..,w_7 Koordinaten der Segre-Einbettung, d.h. w_i=x_i*y_0 und w_(4+i)=x_i*y_1 für i=0,...,3

```
R=kk[w_0..w_7]
M=matrix{{w_0..w_3},{w_4..w_7}}
```

–das Bild der Segre-Einbettung in PP^7 ist Schnitt der folgenden Quadriken:

```
I=minors(2,M)
betti res I
S=kk[y_0,y_1,x_0..x_3]
```

–Ist q einer der beiden quadratischen Erzeuger von E (in Koordinaten x_0,..,x_3) und Q=V(q) die zugehörige Quadrik, dann wird bestimmt diese durch Bihomogenisierung die 3 biquadratischen Erzeuger (y_0)^2*q, y_0*y_1*q,(y_1)^2*q vom Bild der Einbettung QxPP^1->PP^7:

```
K=res ideal((y_0)^2,(y_0)*(y_1),(y_1)^2)
```

–durch die beiden linearen Relationen s1,s2 von ((y_0)^2,y_0*y_1,(y_1)^2) sind durch Bihomogenisierung 8 Relationen x_j*si , i=1,2;j=0,..,3, bestimmt, welche genau 6 linearen Relation gehorchen. Diese 6 linearen Relationen haben noch genau eine Syzygie:

```
N=K.dd_2
N0=N_{0}*matrix{{x_0..x_3}}
N1=N_{1}*matrix{{x_0..x_3}}
Nc=(image N0)+(image N1)
G=matrix{{-w_4,-w_5,-w_6,-w_7,0,0,0,0},{w_0,w_1,w_2,w_3,-w_4,-w_5,-w_6,-w_7},
{0,0,0,0,w_0,w_1,w_2,w_3}}
betti res image G
```

Selbständigkeitserklärung

Hiermit versichere ich, daß die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe und nur mit den angegebenen Literaturquellen entstanden ist.

Bayreuth, den 28. September 2002

....

(Michael Sagraloff)

Literatur

[Alexander, Hirschowitz] *Alexander, J., Hirschowitz, A., Polynomial interpolation in several variables,* J. of Alg. Geom. 4 (1995), 201-222

[Eisenbud] *Eisenbud, D., Commutative Algebra. With a view toward algebraic geometry*, GTM **150**, Springer-Verlag, New York 1995.

[Fulton] *Fulton, W., Intersection Theory.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete; 3.Folge, Band 2, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo 1984.

[Harris] *Harris, J., Algebraic Geometry. A first Course.* GTM **133**, Springer Verlag, New York 1992

[Hartshorne] *Hartshorne, R., Algebraic Geometry.* GTM **52**, Springer Verlag, New York 1977

[Ranestad, Schreyer] *Ranestad, K., Schreyer, F.O., Varieties of sums of powers, Journal für die reine und angewandte Mathematik.* **525** (2000), 147-181, Walter de Gruyter, Berlin New York 2000.

[Schreyer] *Schreyer, F.O., Syzygies of canonical curves and special linear series.* Math. Ann. 275 (1986), 105–137

[Reye 1] *Reye, T., Erweiterung der Polarentheorie algebraischer Flächen,* J. reine angew. Math. **78** (1874), 97-114

[Reye 2] *Reye, T., Geometrischer Beweis des Sylvesterschen Satzes: "Jede quaternäre cubische Form ist darstellbar als Summe von fünf Cuben linearer Formen"*, J. reine angew. Math. **78** (1874), 115-122

[Reye 3] *Reye, T., Darstellung quaternärer biquadratischer Formen als Summe von zehn Biquadraten,* J. reine angew. Math. **78** (1874), 123-129