Aufgabe 1 *(DPLL)* (10 Punkte)

Beweisen Sie die (Un-)erfüllbarkeit der folgenden Menge propositionaler Klauseln mittels des Davis-Putnam-Logemann-Loveland-Verfahrens. Wieviele Verzweigungsschritte benötigt das DPLL-Verfahren für diese Eingabe mindestens?

$$
\begin{array}{ccccccccccl}
P_1 & \vee & \neg P_2 & \vee & P_3 & \vee & \neg P_4 & \vee & \neg P_5 & \qquad & (1) \\
P_1 & & & \vee & P_3 & \vee & P_4 & \vee & P_5 & & (2) \\
P_1 & & & \vee & \neg P_3 & \vee & P_4 & & & & (3) \\
P_1 & & & \vee & P_3 & \vee & \neg P_4 & \vee & P_5 & & (4) \\
P_1 & & & \vee & \neg P_3 & \vee & \neg P_4 & & & & (5) \\
\neg P_1 & \vee & \neg P_2 & & & & & & & & (6) \\
 & & P_2 & & & & & & & & (7) \\
 & & \neg P_2 & \vee & P_3 & \vee & P_4 & \vee & \neg P_5 & & (8)
\end{array}
$$

Aufgabe 2 *(Semantik)* ($10 + 10 = 20$ Punkte)

Sei Σ eine Signatur mit mindestens einem Konstantensymbol, sei F eine Σ-Formel, und sei x die einzige freie Variable in F.

Teil (a)

Beweisen Sie: Falls $\exists x\ F$ allgemeingültig ist, dann existiert ein Σ-Grundterm t, so daß $F[t/x]$ erfüllbar ist.

Teil (b)

Widerlegen Sie: Falls $\exists x\ F$ allgemeingültig ist, dann existiert ein Σ-Grundterm t, so daß $F[t/x]$ allgemeingültig ist. (Hinweis: F darf Quantoren und/oder Gleichungen enthalten.)

Aufgabe 3 *(Termersetzungssysteme)* (10 Punkte)

Ist das Termersetzungssystem

$$\{\, f(a) \rightarrow f(b),\ f(b) \rightarrow f(c),\ f(c) \rightarrow f(a),\ f(x) \rightarrow x \,\}$$

(i) terminierend (ii) normalisierend, (iii) lokal konfluent, (iv) konfluent? Erläutern Sie kurz.

Aufgabe 4 *(Terminierung, kritische Paare)* (10 + 10 = 20 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \emptyset)$ mit $\Omega = \{a/0,\ b/0,\ f/2,\ g/1,\ h/2\}$, sei R das folgende Termersetzungssystem:

$$f(x, f(a, x)) \to h(x, b) \qquad (1)$$
$$f(b, y) \to g(y) \qquad (2)$$
$$h(x, x) \to g(f(a, x)) \qquad (3)$$

Teil (a)

Beweisen Sie die Terminierung von R mittels einer geeigneten Polynomialordnung $\succ$ mit der Trägermenge $\{\, n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2 \,\}$ und Polynomkoeffizienten in $\mathbb{N}$.

Teil (b)

Berechnen Sie alle kritischen Paare zwischen Regeln in R, und überprüfen Sie für jedes Paar, ob es in R konvergiert.

Aufgabe 5 *(Reduktionsordnungen)* (10 Punkte)

Sei $\succ$ eine Reduktionsordnung über $\mathrm{T}_\Sigma(X)$, sei R eine endliche Menge von Termersetzungsregeln mit der Eigenschaft, daß $l \succ r$ für jedes $l \to r \in R$ gilt. Zeigen Sie: Für jeden Term $s \in \mathrm{T}_\Sigma(X)$ ist die Menge $\{\, t \in \mathrm{T}_\Sigma(X) \mid s \to_R^* t \,\}$ endlich.

Aufgabe 6 *(LPO)* (10 Punkte)

Sei $\Sigma = (\Omega, \emptyset)$ mit $\Omega = \{a/0,\ b/0,\ c/0, f/1\}$, sei X eine abzählbar unendliche Menge von Variablen, und sei $\succ$ die LPO mit der Präzedenz $c > f > b > a$. Was kann man über die Kardinalitäten der folgenden Mengen von Termen aussagen?

$$M_1 = \{\, t \in \mathrm{T}_\Sigma(X) \mid t \prec f(f(a)) \,\}$$
$$M_2 = \{\, t \in \mathrm{T}_\Sigma(X) \mid t \prec f(f(c)) \,\}$$
$$M_3 = \{\, t \in \mathrm{T}_\Sigma(X) \mid t \prec f(f(x)) \,\}$$

Erläutern Sie kurz.